בס"ד

<u>אינפי</u>

גיורא דולה: קורס אינפי'

ימי ה' : 19:45-21:00 שעור ראשון (75)

21:00-21:15 הפסקה

21:15-22:15 שעור שני (60)

משרד - מס' 2515

8607731

GIORA@NETANYA.AC.IL

שעת משרד - לפני או אחרי השיעור ובתאום מראש.

אתר של המרצה - mars.netanya.ac.il/~giora

קורס' מדעי המחשב

חומר הקורס - כמו 5 יחידות בקירוב (חדו"א)

עם העמקה בחומר: הוכחות.

יש קצת חפיפה עם דיסקרטית.

ציון: 80% מבחן סוף

20% תרגיל בית, ציון הגשה

קבוצות של מספרים כולל סימונים

- מספרים טבעיים מסומנים ע"י N (natural) - $1,2,3,4...$
- מספרים שלמים מסומנים ע"י Z (גרמנית) - $0,+1,-1,+2,-2...$

<u>עובדה</u>: כל מס' טבעי הוא מספר שלם.
ההפך לא תמיד נכון - יש מספרים שלמים שאינם טבעיים

$N \subseteq Z$ ← יחס הכלה
יחס זה אומר שכל איבר N הוא גם איבר ב- Z

$Z - N$ או $Z \setminus N = \{0,-1,-2$ ← מייצג את קבוצת כל השלמים שאינם טבעיים כמו $0,-1,-2$
קוראים לקבוצה, קבוצת המשלים של N ב- Z

מספרים רציונליים.
- קבוצת Q (quotion) - כל המספרים שניתן לייצג כמנה של 2 שלמים. לדוגמה: $\frac{1}{2}$, $1.41=\frac{141}{100}$, $\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2$, $\frac{0}{1}=0$

כל מספר שלם הוא מספר רציונלי.

$Z \subseteq Q$ ← יחס הכלה

$Q - Z$ ← כל המספרים הרציונליים שאינם שלמים, לדוגמ, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}..$

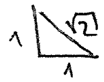
<u>משפט</u> - $\sqrt{2}$ אינו רציונלי.
<u>ניסוח יותר טוב</u> - לכל שני שלמים m , n :
$$\frac{m}{n} \neq \sqrt{2}$$
<u>ניסוח עוד יותר טוב</u> - לכל שני שלמים m , n
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \neq 2$$

<u>הוכחה</u>?

יש ∞ m-ים ו- ∞ n-ים, מה לעשות?

הוכחה בדרך השלילה

נניח בשלילה שקיימים מספרים שלמים m ו- n כך ש:
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$
ונגיע לסתירה. אם נגיע לסתירה נצטרך לבטל את אחת ההנחות שלפניה.

- אי אפשר לבטא את $\sqrt{2}$ כמספר רציונלי 

בסיס

$$\frac{m^2}{n^2}=2$$

$$m^2=2n^2$$

ישנן 2 אפשרויות -
- m זוגי
- m אי-זוגי

קיים k שלם כך ש:

$$m=2k$$

$$\underbrace{m^2=4k^2}_{\text{עכשיו}}\overset{\text{קודם}}{=}2n^2$$

נצמצם ונקבל:

$$n^2=2k^2$$

סיכום ביניים:
התחלנו - $m^2=2n^2$
מסקנה m זוגי
$n^2=2k^2$

מאותו טעם ⇓ $n^2=2k^2$

n זוגי

$$k^2=2x^2$$

$$\vdots$$

$$x^2=2y^2$$

$$\vdots$$

כמעט הבעתי לסתירה: נניח ש .

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}=\frac{2k}{n}=\frac{2k}{x}=$$

$$\frac{2\cdot 2\cdot t}{2x}=\frac{2\cdot 2\cdot t}{2\cdot 2\cdot y}$$

m - אי זוגי
נוסיף או נחסר 1 ונהפוך לזוגי

$m-1=$ זוגי

$m-1=2\cdot k$ k שלם כלשהו

נעבור אלגברית

$$m=2k+1$$

$$m^2=(2k+1)^2$$

$$m^2=4k^2+4k+1$$

m^2 אי זוגי כמו זוגי+זוגי+1

מצד שני $m^2=2n^2$
m^2 זוגי.

m^2 גם זוגי וגם אי זוגי -
קיימת סתירה.

ההנחה שגרמה לסתירה -
m אי זוגי.
⇓
לכן נכון ש- m אי זוגי,
ולכן m זוגי.

המונה מתפרק באינסוף חלקים של 2
ויצא כי m, המונה, הוא ∞ כפולות של 2 $m=2k=4t=8l=\dots$
כיוון ש-m הוא מס' סופי, זה לא ייתכן ← סתירה.
ההנחה האחרונה $\sqrt{2}=\left(\frac{m}{n}\right)^2$ $m,n\in\mathbb{Z}$ ← מסקנה, אין כאלו m ו-n

- כשמגיעים לסתירה, הולכים אחורה בהוכחה ומחפשים את ההנחה האחרונה שהובילה לנו.

נרחיב את קבוצת Q לקבוצה יותר גדולה

• מספרים ממשיים – R (real) – בלי הוכחות בגלל שאין מסוגלות

כל רציונלי הוא ממשי, ההפך הוא לא נכון.

$$\underset{\text{טבעיים}}{N} \subseteq \underset{\text{שלמים}}{Z} \subseteq \underset{\text{רציונליים}}{Q} \subseteq \underset{\text{ממשיים}}{R}$$

$R \setminus Q = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \pi, e \ldots$ ← לא רציונליים.

* רציונאלי בלעז זה הגיוני. קוראים להם אי רציונליים כי קשה להבין אותם.

<u>הנחה בלי הוכחה:</u> R. Descartes ← קרטזית.

כל המספרים הממשיים מבטאים את כל הנקודות על הישר.

<u>הנחה:</u>

כל ממשי מבטא נק' על הישר, ולכן קוראים לישר "הישר הממשי"

פיתוח עשרוני של מספרים אי רציונליים:

$$\sqrt{2} \sim 1.41 = \frac{141}{100}$$

$$(1.41)^2 = 1.9881$$

$$\sqrt{2} \sim 1.414 = \frac{1414}{1000}$$

$$(1.414)^2 = 1.99939\ldots$$

רציונלי ← תהליך אינסופי שלעולם לא יגמר ← אי רציונלי.

אפשר להמשיך ולפתח קירובים עבור $\sqrt{2}$ שיהיו יותר ויותר מדויקים אך לעולם לא ישוו ל- $\sqrt{2}$.

– $\sqrt{2}$ הוא אי רציונלי והוא מנה של 2 אי-רציונליים $\sqrt{2}$ = $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ = $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

אינפי קשור לסדרות האינסופיות הללו.

בס"ד

<u>תכונות הערך המוחלט</u>

נתון מס ממשי x. נסמן ב- $|x|$ את הערך המוחלט של x המוגדר ע"י:

1. כמו המרחק שבין x ובין 0.
2. הגדרה נוספת:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

תוספת מינוס - למס' שלילי הופכת אותו לחיובי.

<u>תכונות:</u>

המילה לכל מסומנת ע"י $\forall$

• תכונה 1: $\forall x \quad |x| \geq 0$

$|x| = 0 \iff x = 0$

• תכונה 2: $\forall x \forall y \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

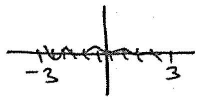
• תכונה 3: $\forall x \forall y \quad |x+y| \leq |x| + |y|$

$0 \leq x, y$ יש שוויון

$x, y \leq 0$ יש שוויון

$\left[\begin{array}{l} x < 0 \leq y \\ y < 0 \leq x \end{array}\right.$ נקבל אי שוויון.

• תכונה 4: פתרון אי שוויון: * $|x| \leq 3$

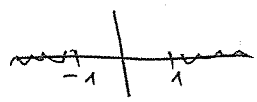


$|x| \leq a$

פתרון: $-a \leq x \leq a$

$\{x \mid -a \leq x \leq a\}$ קבוצת כל ה-x-ים כך ש

* $|x| > 1$



$\{x \mid x > 1\} \underset{\text{או}}{\cup} \{x \mid x < -1\}$

* $|x| \geq c$

$\{x \mid x \geq c\} \cup \{x \mid x \leq -c\}$

← המשך.

תס״ג

* $|x-a| < b$

פתרון:

$-b < x-a < b$

נוסיף a בכל האגפים

$-b+a < x < b+a$

<u>קטעים וקרניים</u>

נניח כי a ו-b מספרים ממשיים $a<b$

נגדיר את $[a,b]$ שיקרא הקטע הסגור בין a ו-b ע"י:

$$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

קב' כל ה-x כך ש   המקיים

נגדיר את הקטע הפתוח בין a ל-b ע"י:

$$(a,b) = \{x \mid a<x<b\}$$

נגדיר את הקטע החצי סגור מימין ופתוח משמאל ע"י:

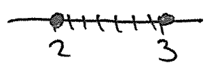
$$(a,b] = \{x \mid a<x \le b\}$$

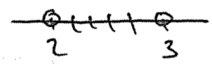
חצי סגור משמאל ופתוח מימין ע"י

$$[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$$

$$(a,b) < [a,b]$$
$$(a,b] < [a,b]$$
$$[a,b] - (a,b) = \{a,b\}$$
$$[a,b] - (a,b] = \{a\}$$

<u>דוג'</u>:

$[2,3]$ 

$(2,3)$ 

קרן סגורה - $[7,\infty)$ אין קצה מימין. ∞ - אינסוף.

$$[7,\infty] = \{x \mid 7 \le x\}$$

אין מס בשם אינסוף. שואף לאינסוף - צורת ביטוי לומר שהמס הולך וגדל

קרן סגורה - $(-\infty,2]$

$$\{x \mid x \le 2\}$$

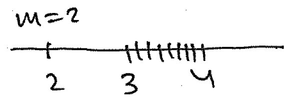
קרן פתוחה - $(7,\infty)$

$$\{x \mid 7<x\}$$

בס"ד

<u>דוגמה:</u>

נגיד קטע $[3,4]$



$m=2$ מחוץ לקטע משמאל.
אם נקח x:

$$\underset{\text{שייך}}{x \in [3,4]} \quad \text{אז} \quad 2 < x$$

הגדרה: חסם מלרע של קבוצה.

נתונה קבוצה ממשית A
$(A \subseteq \mathbb{R})$
ומס' ממשי m.

נגיד כי m הוא חסם מלרע של A אם

$$\underset{\text{לכל}}{\forall} x \overset{\text{שייך}}{\in} A \ , \ m \le x$$

חסם המלרע המקס' במקרה שלנו יהיה 3.
במקרה כזה 3 יהיה גם חסם וגם מוכל בקבוצה.

גאומטרית - כל איברי הקבוצה נמצאים מימין ל-m או על m.

דוגמה לקבוצה ללא חסם מלרע - $(-\infty,7]$

<u>הגדרה</u>: קבוצה שיש לה חסם מלרע נקראת חסומה מלרע.

<u>חסם מלעיל</u>: נתונה קבוצה ממשית $(A \subseteq \mathbb{R})$. נגיד כי היא חסומה מלעיל אם קיים מס ממשי m כך ש-

$$\forall x \in A \qquad x \le m$$

המשך הגדרה - מס' זה אם הוא קיים יקרא חסם מלעיל של A.

$\mathbb{N}$ - חסומה מלרע ע"י 1 אך לא חסומה מלעיל

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $(-\infty,\infty)$ - לא חסומות, לא מלעיל ולא מלרע

$\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ - חסומה מלעיל אך לא מלרע.

בס"ד

אם יש לקבוצה חסם מלעיל או מלרע, האם יש עוד חסמים?

התשובה היא כן.

מלעיל 5, 6, 5.5 ... $[2,5]$ מלרע 2, 1, 0, 0.5 .

כן לא חכמה לקחת חסמים יותר רחוקים מהקבוצה.
האם יש חסם הקרוב ביותר לקבוצה?

דוגמה: $(7,9)$ חסומה מלעיל ומלרע
האם יש חסמים יותר מדויקים מ-7 או 9.
התשובה - אין.
מסתבר כי 7 חסם מלרע הגדול ביותר.

הגדרה: חסם תחתון של קבוצה - נתונה קבוצה A אשר חסומה מלרע. הגדול ביותר מבין חסמי המלרע שלה נקרא חסם תחתון.
חסם עליון של קבוצה זהו חסם מלעיל הקטן ביותר מבין החסמים.

* סימון לחסם העליון של A - $SupA$
* סימון לחסם התחתון של A - $InfA$

משפט ללא הוכחה:

נתונה קבוצה ממשית חסומה מלעיל A. אז יש לה חסם עליון.
נתונה קבוצה ממשית חסומה מלרע B. אז יש לה חסם תחתון.

דוגמה:
נביט על הקבוצה הרציונלית B – B איננה קטע (B הוא C שהוציאו ממנו את המספרים האי רציונליים)

$$B\subseteq Q$$

המקיימת
$$B=\{x\mid x\in Q,\ x^2<2\}$$
$$B=\{1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4},1.41,1.414,1.4142,\ldots\}$$

הקבוצה B חלקית ל-Q ואין לה חסם עליון ב-Q.

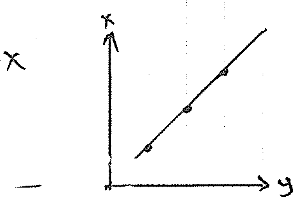
נביט על C (C קטע פתוח)
$$C=\{x\mid x\in R,\ x^2<2\}=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

סדרות

הגדרה: סדרה היא פונקציה שתחום ההגדרה (ציר x) שלה הוא קבוצת הטבעיים והטווח שלה הוא R.
y-ים חופשיים, סימון $a_1, a_2, a_3, \ldots$ וכן הלאה.

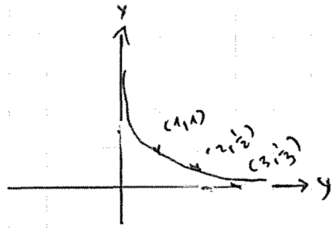
דוגמה: $a_n = n$ הגרף של הסדרה:

$y=x$



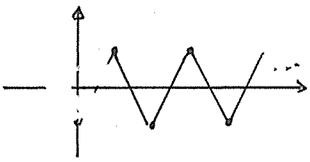
דוגמה: $b_n = \frac{1}{n}$

$y=\frac{1}{x}$



יתכנו גרפים של סדרות שאינם חלק מגרפים של פונקציות

דוגמה: $c_n = (-1)^{n+1}$



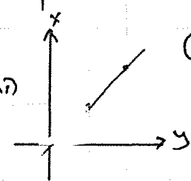
אפשר אבל קשה.

$c_1 = (-1)^2 = +1$
$c_2 = (-1)^3 = -1$
$c_3 = (-1)^4 = +1$

תמונה של סדרות:

נתונה סדרה $\{a_n\}$. נגיד כי התמונה של הסדרה זהו קבוצת כל ה-y-ים אשר מתקבלים בפועל כתוצאה של x-ים מסוימים.

דוגמה: $a_n = n$



התמונה היא N

דוגמה: $b_n = \frac{1}{n}$ לפי הגרף מעלה $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ התמונה

דוגמה: $c_n = (-1)^{n+1}$ לפי הגרף מעלה $\{-1, 1\}$ התמונה

בס"ד

הגדרה: נתונה הסדרה d_n, נגיד כי היא חסומה מלעיל
או חסומה מלרע או חסומה אם התמונה שלה
חסומה מלעיל או מלרע או חסומה (חסומה מלעיל וגם מלרע).

דוגמה: $a_n=n$ התמונה בפועל N

חסומה מלרע אך לא מלעיל

דוגמה: התמונה $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\ldots$ התמונה

חסומה מלעיל ע"י 1 ומלרע ע"י 0.

דוגמה: התמונה $-1,1$

חסומה מלעיל ע"י 1 ומלרע ע"י -1

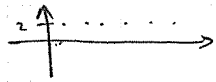
הגדרה: נתונה סדרה a_n נגיד כי היא:
1. עולה במובן הצר אם לכל $n\in N$ $a_n<a_{n+1}$
2. עולה במובן הרחב אם לכל $n\in N$ $a_n\le a_{n+1}$
3. יורדת במובן הצר אם $\forall n\in N$ $a_n>a_{n+1}$
4. יורדת במובן הרחב אם $\forall n\in N$ $a_n\ge a_{n+1}$

דוגמה: $a_n=n$ ← עולה במובן הצר

דוגמה: $a_n=\frac{1}{n}$ ← יורדת במובן הצר

דוגמה: $c_n=(-1)^{n+1}$ ← לפעמים עולה ולפעמים יורדת ולכן איננה עולה ואיננה יורדת.

דוגמה: $\forall n,\ d_n=2$



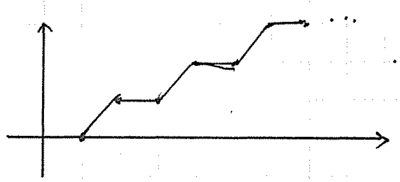
$d_n\ge d_{n+1}$
$d_n\le d_{n+1}$

הסדרה עולה במובן הרחב וגם יורדת במובן הרחב.

דוגמה: $e_n=[\frac{n}{2}]$

[ ] ערך שלם, בלי נק' עשרוניות.

$e_1=[\frac{1}{2}]=0$
$e_2=[\frac{2}{2}]=1$
$e_3=[\frac{3}{2}]=1$
$e_4=[\frac{4}{2}]=2$



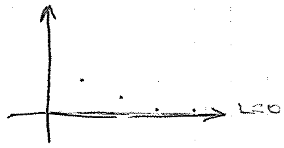
הסדרה עולה במובן הרחב - לפעמים עולה ולפעמים נשארת.

הגדרה: הגדרת הגבול של סדרה:
נניח סדרה a_n ונתון מספר ממשי L.
נגיד כי הסדרה מתכנסת לגבול L (או שואפת לגבול L) כאשר n שואף ל-∞
ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
אם:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \geq 0 \ (n > k) \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

אפסילון (תמיד גדול מ-0). קיים. מס' האיברים שלא מקיימים את התנאי. או המס' שאחריו כולם מקיימים את התנאי. הגבול

דוגמה: $a_n = \frac{1}{n}$



$L=0$

תזכורת: $|x|<1$ המרחק של x מ-0 קטן מ-1

$-1 \quad 1$

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$-\varepsilon \quad \varepsilon$

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

נוסיף $+L$ לשלושת האגפים

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

• $L=0, \quad \varepsilon=3$

$$-3 < a_n < 3$$

ה-a_n-ים (y-ים) של הסדרה הם בין 1 ל-0.
עבור $\varepsilon=3$, התנאי מתקיים לכל n

• $L=0, \quad \varepsilon=4$

$-4 < a_n < 4$ לכל n.

• $L=0, \quad \varepsilon=\frac{1}{2}$

$$-0.5 < a_n < 0.5$$

K הוא מספר כך שלכל n שגדול מ-K התנאי מתקיים.

$K=2$

• $L=0, \quad \varepsilon=1$

$$-1 < a_n < 1$$

$K=1$

• $L=0, \quad \varepsilon=\frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{3} < a_n < \frac{1}{3}$$

$K=3$

ככל שהאפסילון קטן, רוצים קרבה יותר גדולה ל-L ולכן יש יותר פסולים = K יגדל.

ככל ש ε קטן, הקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ קטן. יהיו פחות איברים שייכנסו, ולכן K יגדל.

על איזה ציר כל אות מצוירת?

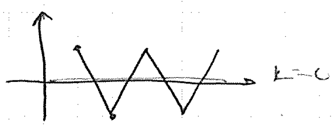
- ε - על ציר ה-y
- L - על ציר ה-y

$$\underbrace{-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon}_{\text{כולם בציר ה-y}}$$

- n - על ציר ה-x
- k - על ציר ה-x

$(n>k)$ על ציר ה-x

דוגמה:



$$a_n = (-1)^{n+1}$$

$$L=0$$

$$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$

$$L=0, \ \varepsilon=4$$

$$-4 < a_n < 4$$

כולם מקיימים, $k=0$

$$L=0, \ \varepsilon=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < a_n < \frac{1}{2}$$

אף אחד לא מקיים, אין K (לא קיים K שקול ל- $K=\infty$)

הגדרת הגבול היא כזו: לכל $\varepsilon>0$ קיים $K \geq 0$
עבור $a_n(-1)^{n+1}$ $L=0$ לא קיים K.
הגדרת הגבול לא מתקיימת

$L=\frac{1}{2}$

$$L=\frac{1}{2}, \ \varepsilon=\frac{1}{4}$$

$0.25 < a_n < 0.75$) אף אחד לא מתקיים ולכן $L=\frac{1}{2}$ לא טוב.

עבור הסדרה $a_n=(-1)^{n+1}$ אף L לא יתאים כי תמיד יהיה $\varepsilon>0$ קטן מספיק כך שהקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ לא יכיל את 1 או את -1, או את שניהם.

* למשל עבור $a_n=(-1)^{n+1}$, $L=\frac{1}{2}$, $\varepsilon=\frac{1}{4}$ יצא התנאי:

$$0.25 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} < a_n < \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 0.75$$

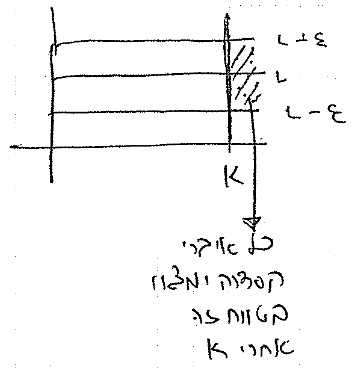
אף n לא מקיים את התנאי $0.25<a_n<0.75$ ולכן לא קיים K <u>אחרון רע</u>.
ולכן הגדרת הגבול לא קיימת.

בסיס

המשך לקודם

לכל L ממשי קיים $\varepsilon>0$ קטן כך שהקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ לא מכיל את 1 או לא מכיל את -1 או את שניהם.
כי $\varepsilon<1$ יקיים כי $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ לא מכיל את 1 או את -1 או את שניהם.

<u>טענה</u>- נתונה סדרה a_n ונתון מס' L כך שהגדרת הגבול מתקיימת אז הסדרה חסומה.



<u>הוכחה</u>: נקח $\varepsilon=1$ (או כל מס' שרירותי אחר) אז קיים K כך ש

$$n>K \Rightarrow L-1<a_n<L+1$$

נביט במספר

$$H=\max\{a_1, a_2, \dots, a_K, L+1\}$$

לכל n $\quad a_n\le H$

לפי הגדרת מקסימום $a_1\le H$, $a_2\le H$, $a_K\le H$, $a_{K+1}<L+1\le H$, a_{K+2}

עבור כל n כך ש $n\le K$ נתון לפי הגדרת המקסימום כי

$$a_n\le H=\max\{a_n \dots\}$$

עבור $n>K$, $a_n<L+1\le\max\{\dots L+1\}=H$ מלעיל

חסימה מלרע - $G=\min\{a_1, a_n, L-1\}$ הוא חסם מלרע של הסדרה.

<u>משפט</u>-

נתונות שתי סדרות a_n ו- b_n ונתון כי קיימים L ו- M כך ש:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n=L$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n=M$$

אז $\exists \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=L+M$

בקיצור, אם מחברים את הסדרות אז אפשר לחבר את הגבולות. חלק ממשפט שקובעים לנו אריתמטיקה של גבולות.

20.11.16 בס"ד

אינפי - שיעור 3

טענה: נתונה קבוצה ממשית A ($A\subseteq\mathbb{R}$) אז הטענות הבאות שקולות

1. הקבוצה A חסומה מלעיל ומלרע
2. קיים מס' ממשי $M>0$, כך

$$\forall x\in A\ ,\ |x|\le M$$

דוגמה: -2 ⊢ A ⊣ 3 חסם מלעיל 3, חסם מלרע -2

$$\forall x\in A$$
$$-3\le x\le 3$$
$$|x|\le 3$$

בצורת הכתיבה החדשה מפסידים דיוק אך מרוויחים כתיבה נוחה יותר.

הוכחה: נוכיח כי $2\Leftarrow 1$

נתון כי קיימים שני מספרים ממשיים p,q כך ש

$$\forall x\in A,\ p\le x\le q$$

נוכיח כי קיים $M>0$ כך ש

$$\forall x\in A\quad |x|\le M$$

<u>מקרה א'</u>: $p,q>0$

במקרה זה: $\forall x$

$$-q\le 0\le p\le x\le q$$

ולכן $M=q$ הוא כדרוש.

<u>מקרה ב'</u> $p,q<0$

$$p\le x\le q\le 0\le -p=|p|$$

ובמקרה זה $M=-p=|p|$

<u>מקרה ג'</u> $p\le 0\le q$

$$\forall x$$
$$-M\le -|p|\le p\le x\le q=|q|\le M$$
$$M=\max\{|p|,|q|\}$$

סוף הוכחה $2\Leftarrow 1$

בסוף

הוכחת $1 \Leftarrow 2$

נתון שקיים $0<M$ כך ש

$$\forall x \in A \quad |x| \le M$$

$$-M \le x \le M$$

נבחר $M=q$ ו- $p=-M$

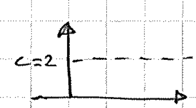
טענה

נתון מס' ממשי C. נגדיר סדרה ע"י

$$\forall n \quad a_n = C$$

אז $\underset{\text{קיים}}{\exists} \underset{\text{גבול}}{\lim}_{n\to\infty} a_n = C$

דוגמה:



הוכחה:

צ"ל $\forall \varepsilon>0 \quad \exists k\ge 0 \quad (n\ge k) \Rightarrow L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$

$$\underset{L}{C}-\varepsilon < a_n = C < \underset{L}{C}+\varepsilon$$

$$C-\varepsilon < C < C+\varepsilon$$

תמיד מקיימים את התנאי
אין פסולים

$$K=0$$

מס"ב

משפט האריתמטיקה של גבולות.

נתונות סדרות ממשיות $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$ ונתון:

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L$ $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = M$

אז -

א. נבדוק בסדרה $a_n + b_n$ אז

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = L + M$$

ב. נבדוק בסדרה $a_n - b_n$ אז

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = L - M$$

ג. נבדוק בסדרה $a_n \cdot b_n$ אז

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = L \cdot M$$

ד. נבדוק בסדרה! $\frac{a_n}{b_n}$ אז

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$$

ה. נבדוק בסדרה: $a_n^{b_n}$ אז

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = L^M$$

הערה: סעיפים ד' וה' קיימים רק בתנאים נוספים.

בס"ד

דוגמה של שימוש במשפט:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n+2}{n^2+6n+3}$$

$$a_1 = \frac{1^2+5\cdot 1+2}{1+6+3} = \frac{8}{10}$$

$$a_2 = \frac{16}{19}$$

$$\frac{n^2+5n+2}{n^2+6n+3} =$$

$$\frac{\frac{n^2+5n+2}{n^2}}{\frac{n^2+6n+3}{n^2}} =$$

סידרנו מבחינה אלגברית כדי שיהיה קל לחשב גבולות

$$\frac{1+\frac{5n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{6n}{n^2}+\frac{3}{n^2}} =$$

$$\frac{1+5\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{1+6\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} =$$

הסדרה $\frac{1}{n}$ והסדרות הקבועות (תמיד 3, 1, 5, 2, 3, 6, 1).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} C = C$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+2}{n^2+6n+3} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+5\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{1+6\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}$$

בסדרה האחרונה יש הרבה סדרות שלכל אחת יודעים את הגבול שלה, וביניהן יש חיבור, כפל וחילוק.

מסק׳

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{1+5\cdot 0+2\cdot 00}{1+6\cdot 0+3\cdot 0\cdot 0} = \frac{1}{1} = \underline{1}$$

<u>הוכחות (חלקים) מהמשפט</u>

* <u>סעיף ג</u>

דוגמה –

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists k\geq 0 \ (n>k) \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\boxed{\varepsilon = 0.1 \quad \text{נניח}}$

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

a_n $\qquad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} = 0.05 \iff 1 < \frac{n}{20}$

$$20 < n$$

b_n $\qquad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{20} \iff 20 < n^2 \iff \sqrt{20} < n$

$$4 < n$$

$$k = 4$$

$$|(a_n + b_n) - (0+0)| = \left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right| = \underset{n>20}{\frac{1}{n}} + \underset{n>4}{\frac{1}{n^2}} <$$

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

$\underline{n>20}$

בס"ד

הוכחה:

יהי נתון $\varepsilon>0$ אז קיים K_1 כך ש

$$(n>K_1) \Rightarrow |a_n-L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

וקיים K_2 כך ש

$$(n>K_2) \Rightarrow |b_n-M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נגדיר $K=\max\{K_1,K_2\}$

אז $(n>K) \Rightarrow (a_n+b_n)-(L+M) =$

$$|a_n+b_n-L-M| =$$

$$|(a_n-L)+(b_n-M)| \underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq} |a_n-L|+|b_n-M| <$$

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\underline{\varepsilon}$$

סעיף ב' - סעיף החיסור. דומה לסעיף א'

להגיש את סעיף ב' בשיעורי הבית.
לא לשכוח להגיש.

סעיף ג' - סעיף הכפל

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = M$$

$$a_n \cdot b_n - L\cdot M$$

רוצים לקבל את $a_n\cdot b_n - L\cdot M$ ע"י a_n-L + b_n-M

$$a_n\cdot b_m - L\cdot M =$$

$$a_n\cdot b_n - Lb_n + L\cdot b_n - LM$$?

$$(a_n-L)b_n + L(b_n-M)$$

מסק'

יהי נתון $\varepsilon>0$ אז

$$|a_nb_n-LM| =$$

$$|a_nb_n-Lb_n-Lb_n-LM| =$$

$$|(a_n-L)b_n+L(b_n-M)|$$

$$\le |(a_n-L)b_n|+|L(b_n-M)| =$$

$$|a_n-L|\cdot|b_n|+|L|\cdot|b_n-M|$$

רוצים להחליף את $|b_n|$ בביטוי קבוע שאינו תלוי ב-M

כיוון ש- b_n מתכנסת (יש לה גבול) אז היא חסומה.

ולכן קיים מס' חיובי $S>0$ כך שלכל n $|b_n|<S$

ולכן

$$\le |a_n-L|\cdot|S|+|L|\cdot|b_n-M|$$

קיים $0<k_1$ כך ש-

$$(n>k_1) \Rightarrow |a_n-L| < \frac{\varepsilon}{2S}$$

$$|a_n-L|S < \frac{\varepsilon}{2}$$

קיים $0<k_2$ כך ש-

$$(n>k_2) \Rightarrow |b_n-M| < \frac{\varepsilon}{2|L|} \Leftrightarrow$$

$$|L|\cdot|b_n-M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נגדיר $k=\max\{k_1,k_2\}$ אז לכל $n>k$

$$|a_nb_n-LM| = |a_nb_n-Lb_n+Lb_n-LM| =$$

$$|(a_n-L)b_n+L(b_n-M)| \le$$

$$|(a_n-L)b_n|+|L(b_n-M)| =$$

$$|a_n-L|\cdot|b_n|+|L|\cdot|b_n-M| \overset{\text{חסימות}}{\le}$$

$$|a_n-L|\cdot S+|L|\cdot|b_n-M| <$$

$$\frac{\varepsilon}{2S}\cdot S+|L|\cdot\frac{\varepsilon}{2|L|} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

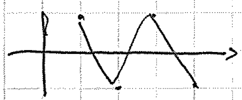
הסק

הוכחנו

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

שאלה: האם כל סדרה חסומה מתכנסת.

דוגמה נגדית: $C_n=(-1)^{n+1}$



חסומה ע"י 1 ו-1-
לא מתכנסת.

לא תמיד.

משפט Weierstrass:

נתונה סדרה a_n ונתון כי היא עולה במובן הרחב או יורדת במובן הרחב.
וכמו כן נתון שהיא חסומה, אז הסדרה מתכנסת.

סיכום מקוצר:

מתכנסת $\Leftarrow$ חסומה

חסומה $\not\Leftarrow$ מתכנסת

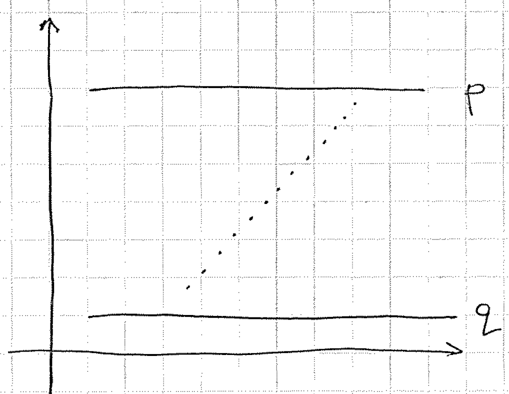
חסומה ומונוטונית (עולה/יורדת) $\Leftarrow$ מתכנסת.

הוכחה

נוכיח רק עבור סדרה עולה (ההוכחה עבור יורדת דומה, להגיש בשבוע הבא)
נתון כי לכל n $a_n \le a_{n+1}$

וכי קיימים מספרים q ו-p כך ש-

$$p \le a_n \le q \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



בס"ד

מכיוון שהסדרה a_n חסומה, יש לה חסם עליון (אקסיומת השלמות) שאותו נסמן L.

יהי נתון $\varepsilon>0$

צריך למצוא K כך ש

$$L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon \qquad n>K$$

נתון ש- $a_n\le L$ כיוון ש- L הוא חסם מלעיל ולכן

$$a_n \le L \le L+\varepsilon$$

נניח שלכל n היה מתקיים

$$a_n \le L-\varepsilon$$

אז היה מתקיים $L-\varepsilon$ הוא חסם מלעיל של הסדרה אשר קטן ממש מ-L וזו סתירה
כיוון ש-L הוא חסם מלעיל הקטן ביותר ולכן קיים
K כך ש $L-\varepsilon< a_K$

כיוון שהסדרה עולה

$$n>K$$

$$L-\varepsilon \underset{\text{נתון}}{<} a_K \underset{\text{היות והסדרה עולה}}{\le} a_n \underset{\text{היות L חסם}}{\le} L < L+\varepsilon$$

$$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$

עבור $n>K$

הסדרה של Euler:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$a_1 = 2$

$a_2 = 2.25$ עולה.

$a_3 = 2.37$

בתרגיל מוכיחים כי a_n עולה וחסומה ולכן היא מתכנסת לחסם העליון שלה.

$e_{\text{אוילר}} = 2.71$ קרוי ע"ש אוילר צהו מס' אי רציונלי
אוילר חישב ראשון
הוכיח שהוא אי רציונלי
חישב בדיוק רב.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

משמעות הסדרה של Euler:

נניח הפקדנו בבנק A ש"ח בריבית שנתית של p אחוזים.

אחרי שנה - $A + \frac{p}{100}\cdot A =$

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

2 הפקדות של חצי שנה באותה ריבית?

אחרי חצי שנה $A + \frac{\frac{p}{2}}{\frac{100}{1}}\cdot A$

$$A\left(1+\frac{p}{200}\right)$$

נפקיד שוב לחצי שנה

$$A\left(1+\frac{p}{200}\right)^2$$

מי יותר גדול?

$$1+\frac{p}{100} < \left(1+\frac{p}{200}\right)^2$$
$$1+\frac{2p}{200}+\left(\frac{p}{200}\right)^2$$

כסף

נחלק ל- n חלקים

$$A\left(1+\frac{p}{100n}\right)^n$$

נציב $p=100$

$$A\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\quad n=1 \quad a_1=2$

$n=2 \quad a_2=2.25$

$\vdots$

e [illegible]

27.11.16 קס׳ל

אריתמטיקה של ∞ $(e^{"})$

עד עתה עסקנו בגבולות $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

כאשר n טבעי על ציר x, a_n, L ממשיים על ציר y.

∞ לא מוגדר כמס' אלא המושג שואף לאינסוף (∞) הוא תיאור הפעולה
שואף ל-∞ הוא "זז הובה ימינה".

מעכשיו נשנה את התפיסה שלנו ונניח כי ∞ הוא מס' על ציר ה-x הכי ימינה שאפשר.

משמעות הגבול נשארת זהה.

נשאלת שאלה:
אם הוספנו את ה"מספר" ∞ על ציר x מדוע שלא נוסיף אותו על ציר ה-y?

נביט ב- $a_n=N$ מה הגבול של a_n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

כיוון ש-n על ציר x שואף ל-∞ אז n על ציר y גם שואף לאינסוף
ולכן נגדיר מושג חדש של גבול
זו הכללה של מושג הגבול.

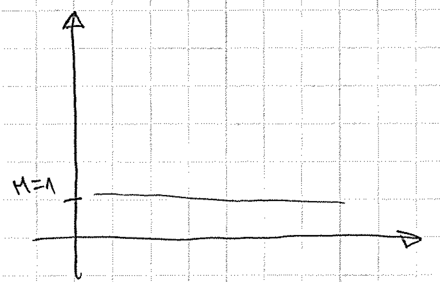
הגדרה:
נאמר כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$

אם

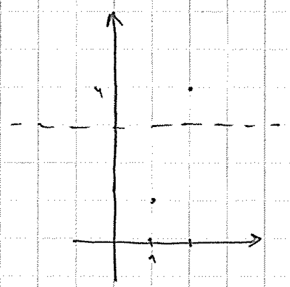
$$\underbrace{\forall M>0}_{y} \quad \underbrace{\exists k>0}_{x} \quad \underbrace{(n>k)}_{x} \Rightarrow \underbrace{a_n \ge M}_{y}$$

$$a_n = n$$

$k=0$
כולם גדולים שווים מ-1



$$b_n = n^2$$



$M=3$

$K=1$ מאמין כולם מקום

$M=1000$

$K=\sqrt{1000}=31.\ldots$

$\boxed{K=31}$

בשני הדוגמאות הקודמות הסדרות היו עולות במובן הצר.
האם אפשר לשאוף לאינסוף בלי להיות סדרה עולה?

דוגמה לסדרה ששואפת לאינסוף ואיננה עולה:
$$b_n = n + 2\cdot(-1)^n$$

$b_1 = -1$ $\quad b_5 = 3$ $\quad 1001 = 999$
$b_2 = 4$ $\quad b_6 = 8$ $\quad 1002 = 1004$
$b_3 = 1$ $\quad b_{1000} = 1002$
$b_4 = 6$ $\quad b_{999} = 997$

$\leftarrow$ אם $M=1000$, $K=1001$ המס' האחרון שאינו בתחום הרצוי.

* ההתכנסות החדשה ל- ∞ היא ממש חדשה, כי למשל סדרה השואפת ל- ∞ היא בהכרח לא חסומה.
לעומת זאת סדרה המתכנסת לגבול רגיל בן חסומה.
* אנחנו רוצים להרחיב ולהגיע למשפט האריתמטיקה של גבולות גם עבור סדרות המתכנסות ל- ∞.

<u>אריתמטיקה:</u>

* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$

אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$

נסמן מקצר $\infty + 2 = \infty$ סדרות הסכום שואפת לאינסוף.

סדרה המתכנסת ל- 2 $\qquad$ סדרה המתכנסת ל- ∞

$\infty + \text{מס' סופי} = \infty$
$\infty - \text{מס' סופי} = \infty$

בס״ד

$\infty + \text{חסומה} = \infty$ ← דוגמה: $\underbrace{n}_{\text{שואפת לאינסוף}} + \underbrace{2\cdot(-1)^n}_{\text{חסומה.}} = \infty$

$\infty - \text{חסומה} = \infty$

$\infty - \infty =$ } תשובה תלויה בסדרות, ~~זה~~ נקרא מקרה פתוח!

$2n - n \to \infty$

$n - 2n \to -\infty$

$n - n \to 0$

נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

מכאן אי אפשר להסיק מהו

$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n$

מכיוון שיש כמה תוצאות אפשריות:

I $a_n = 2n$, $b_n = n$, $a_n - b_n = 2n - n$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$

II $a_n = n$, $b_n = 2n$, $a_n - b_n = -n$, $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = -\infty$

III $a_n = b_n = n$, $a_n - b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

עכשיו $\infty - \infty = ?$ אין תשובה יחידה.

סדרת ההפרש לא יודעים לאן היא שואפת.
סדרה השואפת ל-∞
סדרה השואפת ל-∞

תשובה לא תלויה בסדרות:

$\infty + \infty = \infty$

$\infty \pm \text{מספר} = \infty$

$\infty \cdot \text{מספר} = \infty$

$\infty \pm \text{סדרה חסומה} = \infty$

⇐ מקרה שבו התשובה תלויה בסדרות נקרא מקרה פתוח!

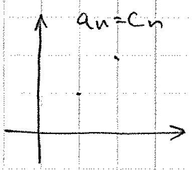
$$\infty \cdot a = \begin{cases} \infty & a>0 \\ \text{? פתוח} & a=0 \\ -\infty & a<0 \end{cases}$$

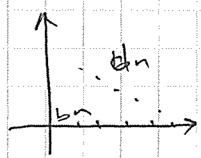
צריכים לפחות 2 דוגמאות, כאשר כל דוגמה תכיל שתי סדרות, האחת שואפת ל-∞ והשניה ל-0, כך שהמכפלה תשווה כל פעם תשובה אחרת.

←

מסק׳

$c_n = a_n = n$ $\qquad$ $b_n = 0$, $d_n = \frac{1}{n}$





$a_n \cdot b_n = n \cdot 0 = 0$

$c_n \cdot d_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} c_n \cdot d_n = 1$

$d_n \neq 0$

$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$

$b_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$$\frac{\infty}{\text{מספר}} = ? \begin{cases} \infty & 0<a \\ ? & a=0 \\ -\infty & a<0 \end{cases}$$

הגדרה: נאמר סדרה a_n. נגיד כי היא שואפת ל-0^+

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

וקיים K כך ש- $\quad a_n \geq 0 \quad n>K$

<u>דוגמה</u>: $\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$k=0$

<u>דוגמה 2</u>: $\frac{1}{n^2}$

$k=0$

<u>דוגמה 3</u>: $\frac{1}{n-\pi}$

$a_1 = \frac{1}{-2.14} < 0$

$a_2 = \frac{1}{-1.14} < 0$

$a_3 = \frac{1}{-0.14} < 0$

$a_4 = \frac{1}{0.85}$

$k=3 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0^+$

$\frac{1}{0^+} = \infty$

מסק'

$\frac{1}{0^+}=\infty$

*שואפת 0^+, שואפת ל-0 וחיובית.
(לפחות החל ממקום ה-K.)

דוגמה:

$$\frac{1}{\frac{1}{n}}=n$$

$$\frac{1}{\frac{1}{n-\pi}}=n-\pi$$

* נתונה סדרה a_n נגדיר כי

$\lim_{n\to\infty} a_n=0^-$ אם

$$\exists K\geq 0 \quad n\geq K \Rightarrow a_n\leq 0$$

$$\lim a_n=0$$

$$\frac{1}{0^-}=-\infty$$

דוגמה:

$$\frac{1}{-\frac{1}{n}}=-\infty \quad 0^-$$

דוגמה 2:

$$\frac{1}{\frac{1}{\pi-n}}=\pi-n \qquad K=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\pi-n}}=-\infty$$

$$\frac{\infty}{0}=?\begin{cases}\infty & 0^+\\ ? & 0\\ -\infty & 0^-\end{cases}$$

$\frac{\infty}{\infty}=?$ בעייה 3.

דוגמאות:

$$\frac{n}{n} \qquad \frac{n^2}{n} \qquad \frac{n}{n^2}$$

נבחר $\begin{cases}a_n=d_n=n\\ b_n=c_n=n^2\end{cases}$ $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim b_n=\lim c_n=\lim d_n$

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=\lim\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=\lim_{n\to\infty} n=\infty$$

$\frac{1}{\infty} = 0+$ $\frac{1}{-\infty} = 0-$

המשך

מקרה 4:

$\frac{0}{0} = ?$

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \qquad \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}$$

נגדיר:

$$a_n = \frac{1}{n} = d_n$$

$$b_n = c_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n = \lim d_n = 0+$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \infty$$

$$\frac{c_n}{d_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = 0$$

טבלת ו- ∞ של חזקה:

$$a^\infty = \begin{cases} \infty & 1 < a \\ 5 \text{ בעיתי} & a = 1 \\ 0+ & 0 \le a < 1 \end{cases}$$

בעיה מסוג 1^∞ מעניני

$a_n = 1 + \frac{1}{n}$
$b_n = n$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.711$$

$$\lim a_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

$c_n = 1$
$d_n = n$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$$

$c_n = 1$
$d_n = n$

$$\left.\begin{matrix} \lim a_n^{b_n} = e \\ \lim c_n^{d_n} = 1 \end{matrix}\right.$$

$1^n = 1$

מסף

המשך הטבלה

$$\infty^{a} = \begin{cases} \infty & a>0 \\ \text{קמשי 6.} & a=0 \\ 0^{+} & a<0 \end{cases}$$

$$(2^{n})^{\frac{1}{n}} = 2$$

$$(2^{2n})^{\frac{1}{n}} = 4$$

<u>נגדיר</u>

$$a_n = 2^{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

$$c_n = 2^{2n} = 4^{n}$$

$$d_n = b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} (2^{n})^{\frac{1}{n}} = \lim 2 = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{d_n} = \lim_{n\to\infty} (2^{2n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 4 = 4$$

א מעותי:

$$0^{0}$$

$$\text{קבוע } 0^{\text{(כלשהו)}} = 0$$

$$\text{כל דבר}^{\text{(0 קבוע)}} = 1$$

<u>דוגמה 1</u>

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{1}{n}$$

$$c_n = \frac{1}{n} \qquad d_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim c_n = \lim b_n = 0$$

$$a_n^{b_n} = 0^{(\frac{1}{n})} = 0$$

$$c_n^{d_n} = \text{דבר}^{0} = 1$$

בס״ד

סיכום אריתמטיקה של ∞

$\infty \pm \text{מספר} = \infty$

$\infty \pm \text{חסום} = \infty$

$\infty + \infty = \infty$

$\infty - \infty =$ בע״י 1

$\frac{1}{0^+} = \infty$

$\frac{1}{0^-} = -\infty$

$\frac{1}{\infty} = 0^+$

$\frac{1}{-\infty} = 0^-$

$$\infty \cdot a = \begin{cases} \infty & 0<a \\ \infty \cdot 0 & \text{בעייתי 2} \\ -\infty & a<0 \end{cases}$$

$$\frac{\infty}{a} = \begin{cases} \infty & a>0 \\ \text{ראה קודם} & a=0 \\ -\infty & a<0 \end{cases}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ בעייתי 3

$\frac{0}{0}$ בעייתי 4

$$a^{\infty} = \begin{cases} \infty & a>1 \\ \text{בעייתי 5} & 1^{\infty} \\ 0^+ & 0 \le a < 1 \end{cases}$$

$$\infty^{a} = \begin{cases} \infty & a>0 \\ \text{בעייתי 6} & \infty^{0} \\ 0^+ & a<0 \end{cases}$$

0^0 בעייתי 7

$\infty \cdot \infty = \infty$

$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

פתרון תרגיל:

כאשר יש תרגיל מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$ עדיף לחלק מונה ומכנה בביטוי ששואף ל- ∞ "הכי מהר".

דוגמה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n+4^n}{5^n+1} = \frac{\infty+\infty+\infty}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty}$$ בעייתי 3.

5^n הכי גדול, ונחלק בו מונה ומכנה

"מסדרים את התרגיל" למצב אחר נוח לפתור

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n+4^n}{5^n+1} = \frac{\frac{2^n+3^n+4^n}{5^n}}{\frac{5^n+1}{5^n}} =$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0+0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

* רוב הטריקים שלמדנו הם רק עבור שבעת המקרים הבעייתיים. אם המקרה אינו בעייתי, אין צורך בטריק, נציב בטבלה ונקבל תשובה.

מסק׳

טענה:

נתונות שתי סדרות a_n ו- b_n כך ש:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

נקיים הסדרה $(1+a_n)^{b_n}$

שהיא מהצורה $(1)^{\infty}$

אז הגבול של

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n} = e^{L}$$

כאשר $L=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n$

תרגול:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

$$\frac{n}{n+1} = 1 + a_n \qquad b_n = n$$

$$a_n = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{-1}{n+1}$$

$$a_n\cdot b_n = \left(-\frac{1}{n+1}\right)\cdot n = -\frac{n}{n+1}$$

מהצורה של $\frac{\infty}{\infty}$ ולכן נחלק קיטווי הגבוה

$$\frac{-\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{-1}{1+\frac{1}{n}} \to \text{שואף ל-0}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = -1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

בס״ד

<u>נימוק נוסף:</u>

נביט ב ההופכי של הסדרה

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

<u>טריקים קטני הוכחה:</u>

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n\left(\frac{-1}{n+1}\right)\left(-(n+1)\right)} =$$

$$\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}} = a_n^{b_n}$$

$$\to e^{-1}$$

4.12.16 | בס"ד

<u>פונקציות ממשיות וגבולותיהן</u>

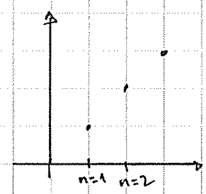
עד עתה: גבולות של סדרות.

<u>מבוא לפונקציות</u> (למי שלא יודע בדיסקרטיות).

סדרה
פונקציה } מה ההבדל

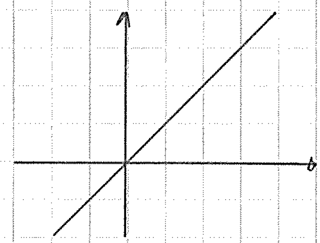
סדרה: קלט - מס' טבעי
פונקציה: כל מס' ממשי שאפשרי.

דוג' חזרה: $a_{n}=n$

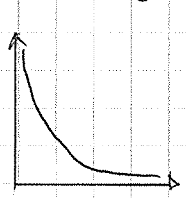


היא חלק מגרף של $y=x$

זוהי פונק' ממשית.



עוד דוגמה: $b_{n}=\frac{1}{n}$ הגרף של הסדרה הוא חלק מגרף הפונקציה.
לפונקציה ממשית - יש בגרף יותר נקודות מאשר לגרף של סדרה.
$y=\frac{1}{x}$ זוהי פונקציה ממשית

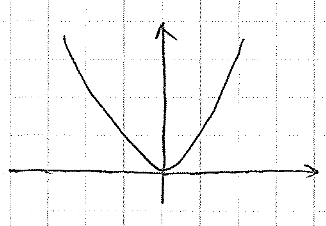


בפונקציה ממשית יש בגרף יותר נק' מאשר לגרף של סדרה.

<u>דיסקרטיות</u>
לכל פונקציה יש תחום הגדרה ויש טווח.
תחום ההגדרה: קבוצת כל ה-x-ים החוקיים להצבה.
טווח: קבוצת כל ה-y-ים

דוגמאות:
* עבור $f(x)=y=x$
אילו x-ים אפשר להציב?
תחום: $R=$ כל x
אילו y: טווח: $R=$ כל y

* עבור $f(x)=x^2$
ת"ה - כל $R=x$
טווח - (ערכי y) - R^+ $[0,\infty)$ הגרף יראה כך



גבול

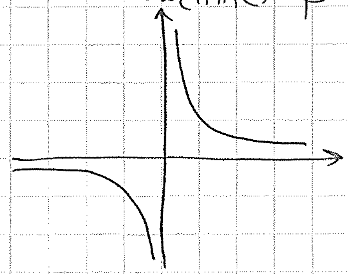
סימון:

$$R \xrightarrow{x^2} R^+$$

תחום $\longrightarrow$ טווח

דוגמאות: $f(x)=\frac{1}{x}$

כך יראה הגרף:



תחום: $R-\{0\}$

טווח: $R-\{0\}$

גבולות של פונקציות:

עבור סדרה $\{a_n\}$ יכולנו לעסוק רק ב- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

אולי קיים ואולי לא קיים.

רק $a=\infty$

עבור פונקציות ניתן לחשוב אחרת $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

עבור כל מיני a-ים שונים.

כל מיני a-ים.

דוגמה:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$ כמו בסדרות

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=y=1$$

דוגמה 2: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=?$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

הופכין מתקבל בתוך

$\frac{1}{0^-}=-\infty$ $\frac{1}{0^+}=\infty$

נדמה שעצמנו נקודה על הגרף או חרק שהולך על הגרף ואנחנו אומרים לו מהו ערך של ציר x שעליו להגיע אליו.

אז $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$

הוא ערך ה-y של אותה הנקודה.

קס"פ

<u>דוגמות</u>

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \underset{x\neq 3}{=} x+3$$

נניח פונקציות:
$f(x) = x+3 \ : R\to R$

$g(x) = \frac{x^2-9}{x-3} \ : R-\{3\}\to R$

ל- $f(x)$ יש נקודה $(3,6)$ שאיננה בגרף של $g(x)$

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

<u>הערה:</u>
כל חוקי הגבולות של סדרות תקפים בגבולות של פונקציות בתנאי שיש להן אותו a.

<u>אריתמטיקה:</u> $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ כי יש אותו a.

$\lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to b} g(x) = ?$ כי אין אותו a.

גבולות של סדרות הן קריטריון עבור גבולות של פונקציות.

* פונקציית הערך השלם:

$[x] = \max\{z / z\in\mathbb{Z},\ z\leq x\}$

$[3] \stackrel{?}{=} \max\{z / z\in\mathbb{Z},\ z\leq 3\} = \max\{3,2,1\dots\} = 3$
$[3]=3$

$[-1] = \max\{-1,-2,-3\dots\} = -1$

$[1.5] = \max\{1,0,-1\dots\} = 1$

$[-1.1] = \max\{-2,-3,-4\dots\} = -2$

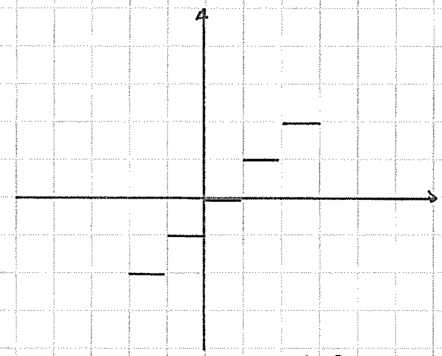
מותר להציב ב $x\in R$, ערך השלם יוצא ב $\mathbb{Z}$ רק

$$[\ ]: \underset{\text{תח'}}{R} \to \underset{\text{טווח}}{\mathbb{Z}}$$

הסק

נצייר את הגרף:

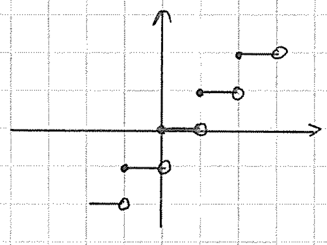
גרף מדרגות.



דרישה של פונקציה - לכל x בתחום יש <u>y יחיד</u>. בטווח.
תכונת החד ערכיות של הפונקציה.

לפי הגרף, עבור $x=2$ נקודות 2 ורק מתאימות לצורה.
$(2,2)$
$(2,1)$
סותר את תכונת החד ערכיות (החח"ע).
נצייר שוב את הגרף בזהירות.

○ - לא בגרף
• - כן בגרף.



גבולות על הגרף הזה.

$$\lim_{x\to 2.5}[x] = 2$$

$$\lim_{x\to 2}[x] \nearrow \lim_{x\to 2^+}[x] = 2 \rightarrow \text{גדולים מ-2}$$

$$\lim_{x\to 2}[x] \searrow \lim_{x\to 2^-}[x] = 1 \leftarrow \text{קטנים מ-2}$$

הגדרה: גבול חד-צדדי ב- $x=a$

נסמן $\lim_{x\to a^+} f(x)$

עבור כל סדרה של x-ים אשר איבריה גדולים ממש מ-a ומתקרבת ל-a.

נסמן $\lim_{x\to a^-} f(x)$

עבור כל סדרה של x-ים אשר איבריה קטנים ממש מ-a ומתקרבים ל-a.

אם ה- $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$

אז לא קיים $\lim_{x\to a} f(x)$

סכם

משפט בלי הוכחה:
נתונה פונקציה אז הטענות הבאות שקולות:

א. $$\lim_{x\to a+} f(x) = b$$
$$\lim_{x\to a-} f(x) = b$$

ב. $$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

תרגילים:

- מה הגבול של $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \frac{0}{0} \to$ ד המופלאים

נפרק את המונה: $x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$

$$\frac{x^3-27}{x-3} = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)} \underset{x\neq 3}{=} x^2+3x+9$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3} x^2+3x+9 = 9+9+9 = \underline{27}$$

- מה הגבול $\lim_{x\to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \to$ שיטת המופלאים

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2^2-\sqrt{x}^2}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4} \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x\to 4} 2+\sqrt{x} = 2+2 = \underline{4}$$

- מה הגבול $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\pm\infty} \to$ שיטת המופלאים

פתרון 1:

$(1+a_n)^{b_n}$ $\lim b_n = \infty$, $\lim a_n = 0$

חוק סגור:
$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^{\lim a_n \cdot b_n}$$

לפי חוק של סדרות, עובר לפונקציות.

$a_n = x$ בהסקה $\to$

$b_n = \frac{1}{x}$ בהסקה

$a_n \cdot b_n = 1$

לפי הגדל:
$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

הוכחה שאינה מסתמכת על שאלת של סדר:

נחשב:

$$\lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$$

$\frac{1}{x} = y$

$$\lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{\text{החלפת משתנה}}{=}$$

$$\lim_{y\to\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

הגדרת של Euler

נחשב:

$$\lim_{x\to 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad y = \frac{1}{x}$$

החלפת משתנה

$$\lim_{y\to -\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$

אי אפשר להשתמש על הגדרת אוילר כי

$z = -y$ שבנחליף משתנה

$$= \lim \left(1+\frac{1}{-z}\right)^{-z} =$$

$$\lim_{z\to\infty} \left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z} =$$

$$\lim_{z\to\infty} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{-z} = \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z-1}\right)^{z} =$$

$$\lim_{z\to\infty} \left(\frac{z-1+1}{z-1}\right)^{z} =$$

$$\lim_{z\to\infty} \left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z} = \lim_{z\to\infty} \left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1+1} =$$

$$\lim_{z\to\infty} \left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1} \cdot \left(1+\frac{1}{z-1}\right)^1$$

החלפת משתנה $w = z-1 \to \infty$

$$\lim_{w\to\infty} \left(1+\frac{1}{w}\right)^{w} \cdot \left(1+\frac{1}{w}\right) = e \cdot 1 = e$$

קטע

מסקנה -

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

קיימים שני גבולות חד-צדדיים ושווים זה לזה ולכן

$$\exists \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \; .$$

דוגמאות:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$$

לפצל מצדדים דומה

נפצל ל- גבול 0- ו- 0+

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=e^{\infty}=\infty$$

הגרף של e^x

הגרף של 2^x

הפונקציה 2^x - אולי א מוגדרת - על R.

נשאל מן הקל אל הכבד?

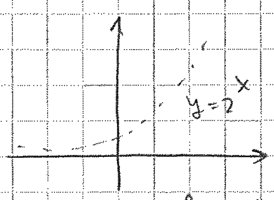
$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$,

$2^0=1$, $2^{-1}=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$, $2^{-2}=\frac{1}{2^2}$

$2^{p/q}=\sqrt[q]{2^p}=(\sqrt[q]{2})^p$

$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}=1.4$

הגרף עד-עכשיו נקודות.



והופך לגרף רציף

$$2^x : R \longrightarrow (0,\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty} 2^x=\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} 2^x=0^+$$

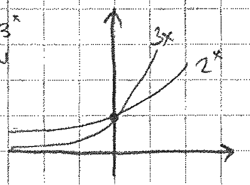
$$\lim_{x\to\infty} 3^x=\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} 3^x=0^+$$

מה ההבדל בין הגרפים הדומים של $y=2^x$ ו- $y=3^x$

x	1	-1	0
2^x	2	$\frac{1}{2}$	1
3^x	3	$\frac{1}{3}$	1

3^x גדל יותר מהר מ- 2^x



*הפונקציה $y=3^x$, וגם את פונקציה זו נגדיר בשלבים

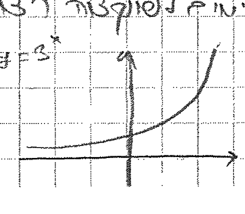
$x\in N$ $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$

$x\in Z$ $3^0=1$

$x\in Q$ $3^{-1}=\frac{1}{3}$

$x\in R$ $3^{p/q}=\sqrt[q]{3^p}=(\sqrt[q]{3})^p$

משלימים לפונקציה רציפה:



בס"ד

תרגיל

$$\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}} = ?$$

נפרק ל $0+$ ו- $0-$

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{0^+}} = 2^{\infty} = \lim_{y\to\infty} 2^y = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = \lim_{x\to -\infty} 2^x = 0$$

$\nexists \lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ כי הגבולות החד צדדיים שונים.

פונקציה הפוכה

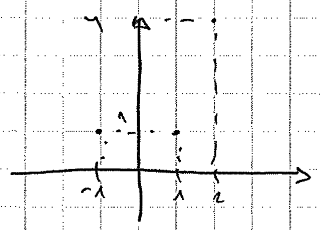
דוגמה: נניח ש $y=2^x$

$$x=1 \to y=2$$
$$x=-1 \to y=\tfrac{1}{2}$$
$$x=0 \to y=1$$
$$\vdots$$

אנחנו מחפשים פונקציה שהופכת בין ה-x וה-y או במילים אחרות בין הקלט והפלט.

$$x=2 \to y=1$$
$$x=\tfrac{1}{2} \to y=-1$$

עוד דוגמה: $y=x^2$



$$x=1 \to y=1$$
$$x=2 \to y=4$$
$$x=3 \to y=9$$
$$x=0 \to y=0$$
$$x=-1 \to y=1$$

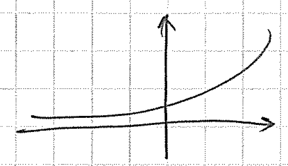
עבור y יש שני מקורות $x=1$ ו- $x=-1$
ולכן הפונקציה ההפוכה איננה פונקציה

במקרה זה, הפונקציה ההפוכה איננה חד-ערכית.

←

בס"ד

2^x



הפונקצי' ההפוכה (היא) לא חד ערכית.

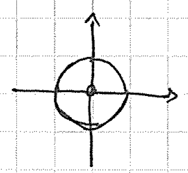
-

:

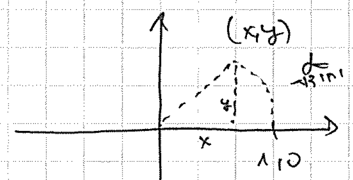
נדבר על $\cos x$:

נצייר מעגל שמרכזו בראשית ומחוגו (רדיוס) = 1.

<u>מעגל היחידה</u>:

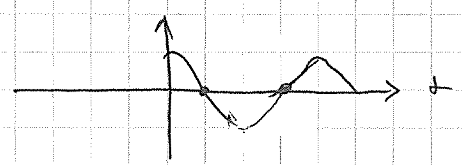


נבחר את הנק' (1,0) על המעגל
נבחר t ירוצית (אורך) ונסובב את (1,0) t יחידות נגד כיוון השעון.



$y = \sin t$
$x = \cos t$

גרף



$t=0$, אז נגיע (1,0) $\cos 0 = 1$ (cos הוא ה-x).

$y=0$ מופיע לפחות פעמיים.
$y=1$ מופיע לפחות פעמיים.

אי-אפשר להפוך (כרגע).

- <u>פונקציה הפוכה</u>:

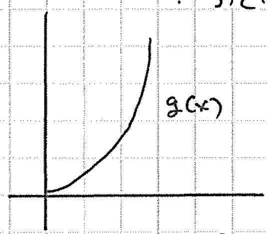
נתונה $y=f(x)$ ורוצים להפוך אותה במובן ש-x ו-y מחליפים תפקידים.
תמונה של הפונקציה f שעבור כל y יש x יחיד יש שם. השם של התכונה - חד-חד ערכיות. (זו לא תכונת החד-ערכיות).

חד-ערכיות: לכל x יש y יחיד
חד-חד ערכיות: לכל y יש x יחיד.

11.12.16 הספק

מוצאים הפוכה ל $y=x^2$ ע״י זה שמגבלים אותה (מצמצמים אותה).

ניקח רק חצי מהגרף:



סט״ן $g(x)=x^2$

$f(x)=x^2$

מה ההבדל בין f ו- g?

$f(x)=x^2 : R \to R^+$

$g(x)=x^2 : R^+ \to R^+$

f איננה חח״ע, g כן.

יש פונקציה הפוכה ל- g

$g^{-1} : 16 \to 4$

$g : \underline{4} \to 16$

$g : 7 \to 49$

$g^{-1} : 49 \to 7$

הגדרה:

נתונה פונקציה חח״ע $h:A \to B$

אז מוגדרת h^{-}

$h^{-1}:B-A$

ע״י $h(a)=b$

$h^{-1}(b)=a$

דוגמה: $y=x^2$

נוציא שורש מ-2 (החיובי)

$x=\sqrt{y}$

$g^{-1}(y)=\sqrt{y}$

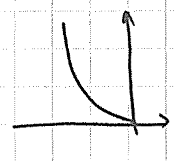
x כללי $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$

בס״ד

יכולנו לצמצם את $f(x)=x^2$

בצורה אחרת :

$$h(x)=x^2 : R^- \to R^+$$



היכן חח״ע ערכי

$$16 \to -4$$

$$h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

* מה הקשר בין הגרפים של g ו- g^{-1} ?

$$\overset{\text{קלט}}{x} = \overset{\text{פלט}}{x^2}$$

$$g(x)=x^2$$

$$g^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

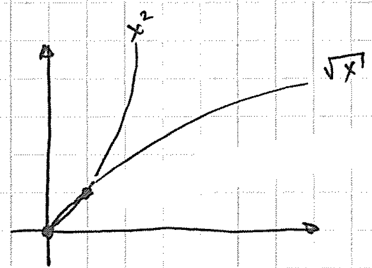
$$x^2=\sqrt{x}$$

$$x^4=x$$

$$x^4-x=0$$

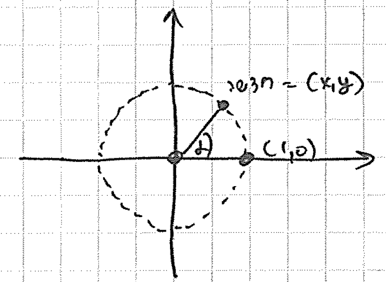
$$x(x^3-1)=0$$

$$x=0 \quad x=1$$



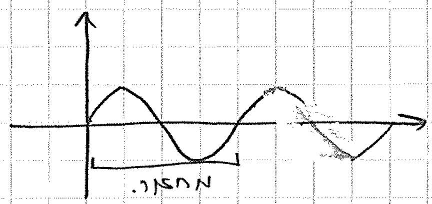
בס"ד

$\sin x$



מתחילים על $(1,0)$, מציירים מעגל יחידה שמרכזו בראשית הצירים,
מסובבים את $(1,0)$ α יחידות נגד כיוון השעון.
ה-y של היחידה הוא סינוס α.

$$y = \sin \alpha$$



זווית של [זווית 360°
מחזור. [לפי אורך הקשת 2π.

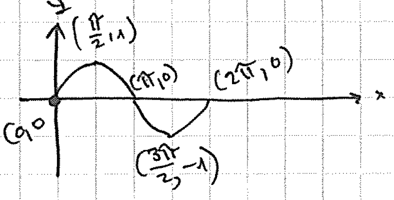
אם רוצים כי הנוסחה

$$(\sin x)' = \cos x$$

תהיה נכונה, חייבים למדוד עם רדיאנים.

$$\text{מחזור} = 2\pi$$

שוב הגרף:



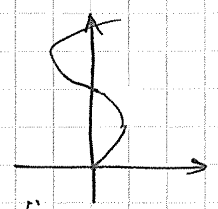
תכונות הפונקציה:
- חסומה בין 1 ל-(-1)
- מוסיפים 2π חוזרים לאותו המקום ולכן

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

- מחזורית עם מחזור 2π.
- כמו כל פונקציה היא חד ערכית.
- האם חח"ע? לא. היא איננה חד חד ערכית.

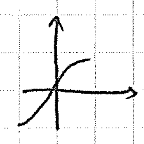
מס"ב

ההפוכה של $\sin x$ אם לא נצמצם:



הפונקציה ההפוכה איננה חח"ע.

נצמצם את sin <u>מספיק</u> כך שתהיה חח"ע ואז ההפוכה שלה תהיה חח"ע.



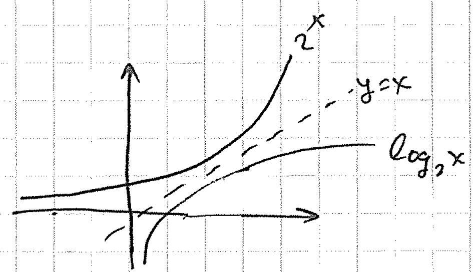
נניח ש:

$$\sin x: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

זוהי פונקציה חח"ע ויש לה פונקציה הפוכה.

בדומה יש:
- arccos
- arctan

$$\underset{\text{arcsin}}{\sin x^{-1}} \quad [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$2^x : R \to (0, \infty)$$

חח"ע - כן
תח"ע - כן.

$$\log_2 x : (0, \infty) \to R$$

$$2^a = b$$

b ההופכי.

$$\log_2 b = a$$

$y=x$ - זו סימטריה בין הגרפים של פונקציה וההפוכה.

בין הגרפים של פונקציה וההפוכה. $y=x$ נשאר במקומו בזמן החילוף של x ו-y!

נוסף

הגדרה

תהא פונקציה $f:x\to y$
נגיד כי a נקודת רציפות של f אם שלושת הגבולות הבאים קיימים, סופיים ושווים.

א. הגבול $\lim_{x\to a^+} f(x)$

ב. $\lim_{x\to a^-} f(x)$

ג. $f(a)$

מבחינה אינטואיטיבית המובן הינו שאין חור בגרף בנקודה $x=a$

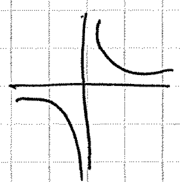
סוג נקודות אי רציפות:

1. אם קיימים א' ו-ב', סופיים ושווים זה לזה, אך $f(a)$ לא שווה להם או איננה מוגדרת אז נגיד כי ב-a יש נקודת אי רציפות סליקה. חור הכי קטן
2. אם א' ו-ב' קיימים סופיים ושונים זה מזה אז ב-a קיימת אי רציפות מסוג קפיצה (או מסוג ראשון). חור בינוני
3. אם אחד מא' או ב' לא קיים או שווה ל-$\pm\infty$ נגיד כי ב-a יש אי רציפות מסוג שני. הכי גדול

אינטואיציה:
- סליקה - חור הכי קטן
- קפיצה - חור בינוני
- מסוג שני - הכי גדול.

דוגמאות:

א) $f(x)=\frac{1}{x} : R-\{0\} \to R-\{0\}$



$a=0$ נקודת אי רציפות של הגרף
כיוון שהגבול:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$
נקודת אי רציפות מסוג שני.

בס"ד

<u>פונקציה אחרת:</u>

$$\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} \underset{x\neq 4}{=} (x+4)$$

הגרפים של $\frac{x^2-16}{x-4}$ ושל $x+4$ <u>זהים</u> למעט העובדה שהנקודה 4,8 נמצאת על הגרף של $x+4$ ולא על הגרף של $\frac{x^2-16}{x-4}$.

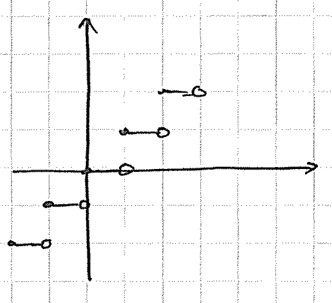
הגרף של $\frac{x^2-16}{x-4}$ יש לו אי רציפות סליקה ב- $a=4$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to (4)^-}\frac{x^2-16}{x-4} = \underline{8}$$

הגדרת נק' אי רציפות סליקה.

כל נקודה אחרת, נקודת רציפות.

← פונקציה $y=[x]$



כל $x\in R-Z$ היא נק' רציפות.
הגבול מימין והגבול משמאל שווים לערך הפונקציה.
כל נק' $a\in Z$ היא נק' אי רציפות, קפיצה.

$$\lim_{x\to 2^+}[x]=2$$

$$\lim_{x\to 2^-}[x]=1$$

$2\neq 1$ סופיים ושונים, לכן נק' קפיצה.

"הנמלה קופצת"

⊛ הרכבה של פונקציות.

נתונות פונקציות

$$f: A \to B$$
$$g: C \to D$$

כך ש- $B \subseteq C$

נגדיר את ההרכבה של g על f שמסומן $g \circ f$ ע"י

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

דוג:

$$f(x) = x+1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x+1)^2$$

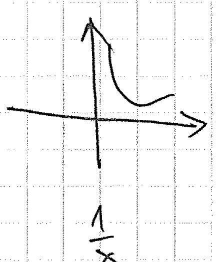
זוהי ההרכבה של g על f.

טענה: אם g עולה ו- f יורדת אז $g \circ f$ יורדת
אם g יורדת ו- f יורדת אז $g \circ f$ עולה.

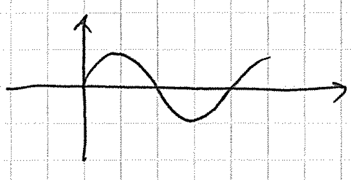
* נבדוק מ - : $\underset{g \circ f}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ $\quad g = \sin$, $f = \left(\frac{1}{x}\right)$

זו דוגמה לפונקציה שהגבולות החד-צדדיים שלה מאחת הנקודות לא מוגדרים בכלל.
זה קשה להגדיר אי רציפות מסוג שני-

תחומי עליה וירידה של $\sin$:



$\frac{1}{x}$



$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ עולה

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ יורדת

$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ עולה.

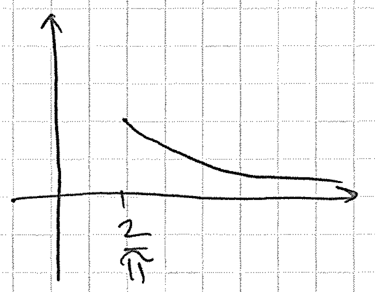
נבדוק את ההרכבה בקטע:

$$\left(\frac{2}{\pi}, \infty\right) \xrightarrow{\frac{1}{x}} \left(0^+, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\text{עולה}} (0, 1)$$

דין קטע

בס"ד

ההרכבה



ההרכבה $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

f פועל על x ראשון

g - פועל על $f(x)$.

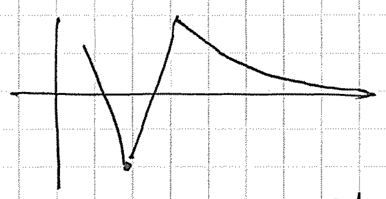
עוד קטע:

$$\left(\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right) \xrightarrow[\text{יורדת}]{\frac{1}{x}} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \xrightarrow[\text{יורדת}]{\sin} (-1, 1)$$

תמיד מסומן עיגול מימין.

עוד קטע:

$$\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right) \xrightarrow[\text{יורדת}]{\frac{1}{x}} \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \xrightarrow[\text{עולה}]{\sin} (-1, 1)$$ יורדת



לפונקציה $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ והיו אינסוף קטעי עליה וירידה.

1 ל- 0.

1 ל- -1

-1 ל- 1

אבל ה- אזור שבהם קורות העליות והירידות יהיו ע"פ קטעים שונים.

זו לא פונקציה מחזורית כי אין לה מחזור קבוע

(חסומה בין 1- ל- -1).

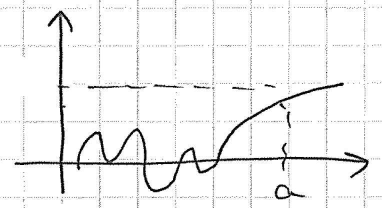
זו פונקציה חסומה ולא מחזורית.

מס״ז

— אם קיים:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

אם לכל סדרה X_n כך ש: $\lim_{n=\infty} X_n = a$



מתקיים $\lim f(x_n) = b$

טענה: $\nexists \lim_{x\to 0+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

נראה שתי סדרות שונות X_n ו- y_n כך ש

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} y_n = 0$$

אבל $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \neq \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{y_n}\right)$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{2}{\pi}\right] = 1$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{2}{5\pi}\right] = 1$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{2}{9\pi}\right] = 1$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{2}{13\pi}\right] = 1$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)\begin{cases}\left[\frac{2}{3\pi}\right] = -1 \\ \left[\frac{2}{7\pi}\right] = -1 \\ \left[\frac{2}{11\pi}\right] = -1\end{cases}$$

מסקנה:

לא קיים הגבול ש

$$\nexists \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}$$

הפונקציות האלמנטריות:

משפחה של פונקציות אשר מוגדרת כדלקמן:
1. כל הפולינומים
2. כל הפונקציות המעריכיות a^x
3. כל הפונקציות הטריגונומטריות

וגם כל פונקציה המתקבלת מהן ע"י חיבור, חיסור, כפל, חילוק, היפוך והרכבה.

דוגמאות:

* האם $\log_2 x$ אלמנטרי?
כן, היא הפוכה של 2^x
2^x מעריכית היא אלמנטרית.

* $\frac{1}{x}$ - כן, חלוקה של 2 פולינומים.

* $\arctan x$ - כן, היפוך של tan (פונק' טריגונומטרית).

* $\sin(\frac{1}{x})$ - כן, הרכבה של 2 פונקציות אלמנטריות.

משפט (בלי הוכחה)

כל פונק' אלמנטרית רציפה בכל תחום הגדרתה.

- אם יש לפונקציה נק' אי רציפות מתחום הגדרתה, אז היא לא אלמנטרית.

• $\frac{x^2-16}{x-4}$ מנה של פולינומים, לכן אלמנטרית (4 לא בתחום ההגדרה שלה)

$x=4$ נק' אי רציפות אך לא מתחום ההגדרה.

• $\frac{1}{x}$ מנה של פולינומים ולכן אלמנטרית.
$x=0$ נק' אי רציפות אבל 0 לא מתחום ההגדרה.

• $f(x)=[x]$ ויש לה נק' אי רציפות מתחום ההגדרה: כל השלמים. לכן היא אינה אלמנטרית.

שאלה
$$[x]=\begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x<2 \\ \vdots & \end{cases}$$

$y=0$ אלמנטרית - פולינום
$y=1$ אלמנטרית - פולינום.

הפעולה שבה לוקחים חלק מהגרף של פונקציה האלמנטרית f וחלק מהגרף של הפונקציה האלמנטרית g ועושים מהם פונקציה אחת: פעולה זו אינה אלמנטרית.

בס"ד

דוגמאות של הרכבת פונקציות

- הרכבה של עולה על עולה => עולה.
- " " " יורדת => יורדת
- " " יורדת " עולה => יורדת
- " " " " יורדת => עולה.

עשינו:

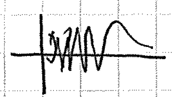
$$f(x) = x+1 \; ; \; R \to R$$
$$g(x) = x^2 \; : \; R \to R^+$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x+1)^2$$

- $$(f \circ g)(x) = f \circ (g(x)) = g(x)+1 = x^2+1$$

\# בד"כ $$g \circ f \neq f \circ g$$

- $$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$g = \sin$$
$$f = \frac{1}{x}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\sin x}$$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

- $$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = x+1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)+1 = \sqrt{x}+1$$

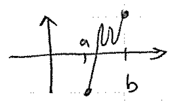
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$$

משפטים אודות פונקציות רציפות על קטע סגור

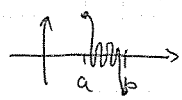
משפט ראשון: תכונת ערך הביניים של Cauchy.

• גרסה ראשונה:

נתונה פונקציה $f:[a,b]\to R$ כך ש- f רציפה בכל נקודות הקטע $[a,b]$ ומתקיים אחד בדיוק משני התנאים הבאים

ציור 

$\leftarrow f(a) < 0 < f(b)$ (1)

ציור 

$\leftarrow f(b) < 0 < f(a)$ (2)

קיים נקודה c אחת לפחות כך ש:

א. $a<c<b$

ב. $f(c)=0$

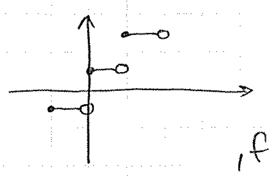
איך אפשר לנסח את שני המקרים הללו בניסוח אחד?

$f(a)\cdot f(b)<0$ (אחד חיובי ואחד שלילי)

דוגמאות:

נבדוק -

$$f(x)=[x]+\frac{1}{2}$$



$f(-1)=-\frac{1}{2}$

$f(1)=1.5$

אין אף c כך ש- $f(c)=0$,
איך זה הגיוני?
- מכיוון ש- f איננה רציפה, אין סתירה.

• משפט כללי:

נתונה $f:[a,b]\to R$ אשר מוגדרת כרציפה בכל נק' הקטע $[a,b]$, ונניח כי קיים d כך שמתקיים אחד משני המקרים הבאים:

$$f(a) < d < f(b)$$

$$f(b) < d < f(a)$$

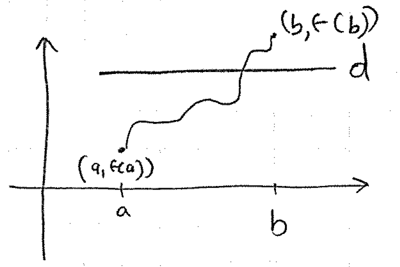
אז קיימת c אחת לפחות כך ש:

א. $a<c<b$

ב. $f(c)=d$

המקרה $d=0$ נותן את הגרסה הפרטית (הגרסה הראשונה).

מס"ק



הוכחה:

נוכיח קודם את המקרה הפרטי ורק עבור אחד המקרים

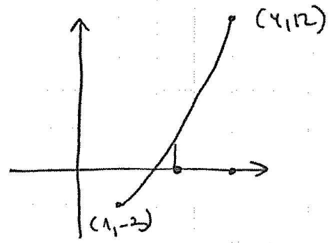
$$f(a) < 0 < f(b)$$

דוגמא: $f(x) = x^2 - 4$, $a=1$, $b=4$

f פולינום ולכן רציפה לכל תחום הגדרתה.

$f(1) = -3 < 0$

$f(4) = 12 > 0$



לפתרון של פולינום קיום שוב

שיטת החצוי - $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$

$f(\frac{5}{2}) = \frac{9}{4}$

נקבל את תת-הקטע $[1, \frac{5}{2}]$

$$f(1) < 0 < f(\tfrac{5}{2})$$

הוכחה איטרטיבית:

נגדיר $b_0 = b$ $a_0 = a$ נקבל את $f(\frac{a_0+b_0}{2})$

קיימות 3 אפשרויות:

1) $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0 \Rightarrow c = \frac{a_0+b_0}{2}$

מצאנו פתרון באקראי.

כמו בציור למעלה.

2) $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0$

נגדיר תת קטע $a_1 = a_0$ $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$

3) $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0$

נגדיר תת קטע $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ $b_1 = b_0$

בס"ד

ונחזור לחישוב $\frac{a_1+b_1}{2}$ וכך התהליך.

חוזרים על התהליך האיטרטיבי, אם אחד המקרים יוצא

$$f\left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)=0$$

נבחר ונגדיר: $c=\frac{a_n+b_n}{2}$

ו- c יקיים $a<c<b$

$f(c)=0$

אחרת התהליך ימשך אינסוף פעמים ונקבל:

$a_0, a_1, a_2, \ldots$

סדרה $\{a_n\}$

סדרה $\{b_n\}$

• תכונות הסדרות:

a_n עולה במובן הרחב

b_n יורדת במובן הרחב

$a_n \le b_n$ לכל n

לכל n:

$$a_n\le b_n\le b_{n-1}\le b_{n-2}\le\cdots\le b_0=b$$

a_n עולה במובן הרחב וחסומה מלעיל

b_n יורדת במובן הרחב וחסומה מלרע ע"י a_0

ולכן a_n מתכנסת ל- $\sup a_n$ ו- b_n מתכנסת ל- $\inf b_n$

לכל n $a_n\le b_n$

$$\sup a_n \le \inf b_n$$

נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$

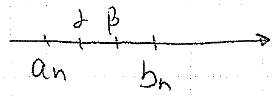
$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$

$\alpha\le\beta$

לכל n:

$$a_n\le\alpha\le\beta\le b_n$$

רוצים להוכיח ש $\alpha=\beta$



המשך

$$0 \le \beta - \alpha \le b_n - a_n$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{4}$$

$$b_3 - a_3 = \frac{b_0 - a_0}{8}$$

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

ולכן: $0 \le \beta - \alpha \le \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$

כיוון שהגבול של

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b_0 - a_0}{\infty} = 0$$

אז לפי משפט הסנדוויץ' נקבל

$$\beta - \alpha = 0$$

ולכן $\alpha = \beta$ ונגדיר $\alpha = \beta = c$

נשים לב כי לכל n

$$f(a_n) < 0$$

$$f(c^-) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$$

לפי תכונת פונקציה רציפה

בצורה דומה: $f(b_n) > 0$

$$f(c^+) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$$

לפי הגדרת נק' רציפות

$$0 \le f(c^+) = f(c) = f(c^-) \le 0$$

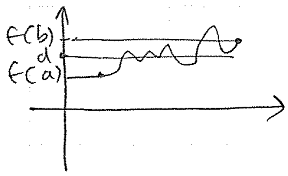
$$0 \le f(c) \le 0$$

ולכן $f(c) = 0$

בס"ד

הוכחת המקרה הכללי:

המקרה הכללי יותר מסובך מהמקרה הפרטי אבל ההוכחה יותר קצרה.
ההוכחה של המקרה הכללי מסתמכת על המקרה הפרטי.



נגדיר: $g(x)=f(x)-d$

אז כיוון ש- f רציפה בקטע $[a,b]$, גם $g(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

$$g(a)=f(a)-d<0$$

$$g(b)=f(b)-d>0$$

ולכן g מקיימת את תנאי תכונת ערך הביניים עבור הקטע $[a,b]$
ולכן גם את מסקנת תכונת ערך הביניים, ולכן קיימת c אחת לפחות כך ש $a<c<b$

$$g(c)=f(c)-d=0$$

כלומר $f(c)=d$

משפט Weierstrass

נתונה פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אשר מוגדרת ורציפה בכל נק' הקטע $[a,b]$
אזי f חסומה בקטע מלעל ומלרע. (המשפט הוא בתנאי שהקטע סגור)

שאלה

נבדוק ב- $f(x)=\frac{1}{x}: (0,1 \to \mathbb{R})$
רציפה ולא חסומה? הייתכן?
- משפט Weierstrass רק עבור קטע סגור $[a,b]$ ולא בהכרח תקף לקטע פתוח $]0,1[$

לטובת ההוכחה נצטרך ללמוד מושג חדש ומשפט חדש (בלי הוכחה):
• תת סדרה - סדרה חלקית:

דוגמה
$a_n=\frac{1}{n}$ $\quad 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}\dots$

ניקח רק את $a_2,a_4,a_6,a_8\dots$. קיבלנו סדרה חדשה $b_n=\frac{1}{2n}$
$\Downarrow$
$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8}\dots$

חלק מהאיברים של הסדרה המקורית:

דוגמה 2:

$c_n=(-1)^n$ $\quad -1,1,-1,1,\dots$
$d_n=c_{2n}$ סדרה קבועה 1
$e_n=c_{2n-1}$ סדרה קבועה -1

$fc_n=c_{3n}=c_n$

הגדרה של תת סדרה:

נתונה סדרה $\{a_n\}$

נתונה סדרה $\{n_k\}$ (n-אינדקס מקורי, n_k האינדקסים שבחרנו)

כך ש $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$

ונגדיר תת סדרה ע״י:

$$b_k = a_{n_k}$$

<u>תכונות של תתי סדרות:</u> (בלי הוכחות)

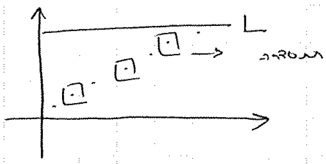
<u>טענה:</u> נניח שנתונה סדרה a_n

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$$

ונבחר n_k סדרת אינדקסים אז

$$\exists \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

ציור במקום הוכחה:



<u>שאלה</u>

נניח כי נתונה סדרה a_n

ונתון

$$\exists \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

האם $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$?

$C_n = (-1)^n$ ← לא מתכנסת $1,-1,1,-1,\dots$

$d_n = C_{2n}$ ← סדרה קבועה, 1

C_n - לא מתכנסת

$d_n = C_{2n}$ מתכנסת ל-1

משפט Bolzano Weirstrass (בקיצור משפט BW):

נתונה סדרה $\{a_n\}$ וקבועים K ו-L כך ש-K חסם מלרע של הסדרה ו-L חסם מלעיל של הסדרה.

$$\forall n \qquad K \le a_n \le L$$

אז קיימת תת סדרה a_{n_k} כך ש $\exists \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$

ומתקיים $K \le \ell \le L$

בס"ד

דוגמאות:

$C_n = (-1)^n$ לא מתכנסת.

חסומה? $-1 \le (-1)^n \le 1$

$C_{2n} = 1$ סדרה קבועה ומתכנסת ל-1

$-1 \le 1 \le 1$

$C_{2n-1} = -1$ סדרה קבועה ומתכנסת ל- -1

$-1 \le -1 \le 1$

הוכחת המשפט של Weiorstrass:

• נוכיח רק כי היא חסומה מלעיל ההוכחה שהיא חסומה מלרע מאוד דומה - להגיש בכתב!

הוכחת חסימות מלעיל בדרך השלילה.
נניח כי f איננה חסומה מלעיל ונגיע לסתירה.
כיוון ש- f איננה חסומה מלעיל אז $y=1$ איננו חסם מלעיל של f.
אז קיימת x_1 $\quad a \le x_1 \le b$

$f(x_1) > 1$

f איננה חסומה מלעיל אז גם $y=2$ איננו חסם מלעיל של f.
אז קיימת x_2 $\quad a \le x_2 \le b$
ו- $f(x_2) \ge 2$

$y=3$ איננו חסם מלעיל של f. אז קיימת x_3 $\quad a \le x_3 \le b$

$f(x_3) > 3$

$\vdots$

קיימת x_n, $\quad a \le x_n \le b$

ו- $f(x_n) > n$

קיבלנו:

$x_1, x_2, x_3, \dots$

x_n סדרה, אשר מקיימת:

$f(x_n) > n$

נפעיל גבול על שני האגפים של אי השוויון:

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) > \lim_{n\to\infty} n = \infty$

צור ה-y

בס"ד

נניח ב- x_n:

$$a \le x_n \le b$$

סדרה חסומה.

לפי משפט BW, קיימת לה תת-סדרה x_{n_k} כך ש

$$a \le \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \le b$$

נסמן c

$$c = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

$$a \le c \le b$$

f רציפה

ולכן $f(c) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})$

לפי תכונות פונקציה רציפה.

ראינו ש

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty$$

$f(x_{n_k})$ היא תת-סדרה

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

לכן $f(c) = \infty$

סגורה - f מוגדרת. $f(c)$ חייב להיות סופי. סתירה.

מסקנה - f חייבת להיות חסומה מלמעלה בקטע $[a,b]$.

המשפט השני של ויירשטרס:

נניח $f:[a,b]\to R$
אשר רציפה בכל נקודות הקטע $[a,b]$
אז (הסופרימום) הוא מקסימום
קיים c אחד לפחות כך ש $a\le c\le b$

$$f(c)=\max_{a\le x\le b} f(x)$$

אותו משפט לגבי המינימום.

<u>הוכחה:</u>

כיוון שהוכחנו ש-f חסומה מלעיל, יש לה חסם מלעיל קטן ביותר (sup) שסימנו M. רוצים למצוא c כך ש- $a\le c\le b$ ו- $f(c)=M$

נתבונן על $M-1$, איננו חסם מלעיל (כי M חסם המלעיל הקטן ביותר).
לכן קיימת x_1, $a\le x_1\le b$, $M-1\le f(x_1)\le M$
נתבונן על $M-\frac{1}{2}$, איננו חסם מלעיל, לכן קיימת x_2 כך ש $a\le x_2\le b$, $M\ge f(x_2)\ge M-\frac{1}{2}$
וכן הלאה.
קיימת x_n, $a\le x_n\le b$

$$M\ge f(x_n)\ge M-\frac{1}{n}$$

לכל n נפעיל גבול:

$$\lim_{n\to\infty} M-\frac{1}{2}=M$$

בור 4

ולכן לפי משפט סנדוויץ'

$$\exists\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M$$

לכל n

$$a\le x_n\le b$$

לכן סדרה חסומה.

לפי משפט WB קיימת תת-סדרה x_{n_k} מתכנסת. נסמן $C=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$

$$a\le c\le b$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(c)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M$$

ותת סדרה שואפת לאותו גבול $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=M$

ולכן $f(c)=M$ סוף ההוכחה.

25.12.16 מסף

* חי נוהג בשבתות קמרי מכונית לטיול ומתניע את מכוניתו

נסמן ב-t את הזמן (בשעות) שעבר מההתנעה

נסמן ב- $f(t)$ את המרחק בק"מ שעבר חי

- כמה ק"מ עבר בשעה הראשונה? $f(1)$
- כמה ק"מ עבר בשעתיים הראשונות? $f(2)$
- כמה ק"מ עבר בשעה השלישית? $f(3)-f(2)$ $\quad h=1$
- בחצי השעה שהתחילה שעתיים לאחר ההתנעה והסתיימה שעתיים וחצי לאחר ההתנעה? $f(2.5)-f(2)$ $\quad h=\frac{1}{2}$
- מהי מהירותו הממוצעת באותה חצי השעה בקמ"ש?

$$\frac{f(2.5)-f(2)}{1/2} \quad h=\frac{1}{2}$$

מרחק. ← זמן

- מהי מהירותו ברבע שעה שהתחילה שעתיים לאחר ההתנעה?

$$\frac{f(2.25)-f(2)}{0.25} \quad h=\frac{1}{4}$$

- מהי מהירותו בדקה שהתחילה שעתיים לאחר ההתנעה

$$\frac{f(2+\frac{1}{60})-f(2)}{\frac{1}{60}} \quad h=\frac{1}{60}$$

כל הביטויים האחרונים הם מהצורה $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

כמעט כל הביטויים הקודמים הם מהצורה עבור h-ים שונים.

- מהירותו הרגעית אחרי שעתיים היא: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

אם f רציפה אז $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h)-f(2)=0$

אם f רציפה ב- $a=2$ (קו מספרים-2) אז $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

אם הפונקציה רציפה ב- $a=2$ אז

$$\lim_{h\to\infty} f(2+h) = \lim_{x\to 2} f(x) = \underset{\text{רציפות}}{f(2)}$$

עבור f רציפה המונה שואף ל-0.
גם המכנה שואף ל-0

ואולי קיים הגבול ומבטא את המהירות הרגעית של המכונית.

←

בס"ד

(יותר כללי מהסיפור אודות המאניות)

הגדרה:
נתונה פונקציה $f(x)$
ונתון $x=a$
נביט בגבול:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ואם הגבול קיים, נקרא לו:
* קצב השינוי הרגעי של f מנק' a
* הנגזרת של f בנקודה a.

תרגיל:
חשב את הנגזרת של $f(x)=x^3$ בנקודה x

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ לכל פונקציה

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3)-\cancel{x^3}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2)}{\cancel{h}}=$$

$$\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2=3x^2$$

תרגיל
חשב את $(\sqrt{x})'$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}\,\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\qquad\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

חוקי גזירה:

תהיינה f ו-g גזירות בנקודה x אזי:

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(cf)' = cf'$ c פונק' קבועה.
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
5. כלל השרשרת $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

במקרה זה f צריכה להיות גזירה בנק' a ו-g גזירה ב- $f(a)$

(עד כאן הסימונים לפי ניוטון)

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

f' של ניוטון $\frac{dy}{dx}$ של לייבניץ

g' של ניוטון $\frac{dz}{dy}$ של לייבניץ

$(g \circ h)'$ של ניוטון $\frac{dz}{dx}$ של לייבניץ

כלל השרשרת – מס' 5

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz \cdot dy}{dy \cdot dx}$$

מסק'

נשתמש ככל האפשר בסימונים של ניוטון:

* הוכחת כלל מס' 1:

$$(f+g)'(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x)) + (g(x+h)-g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$ אריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$f'(x) + g'(x)$$

* הוכחת כלל מס' 2:

$$(cf)'x =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h - cf(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} =$$

$$c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x)$$

הס״ק

- טענה מס' 3 (לא מתקבלה):

נניח ונתונה f וישׁ לה נגזרת f' בנקודה a. אז f רציפה בנק' a.

(כל נק' גזירות של f היא נקודת רציפות של f)

<u>הוכחה</u>

נקח את $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$

נסמן אותו $k(x,h)$ ונחשב את הגבול:

$$\lim_{h\to0} k(x,h) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) =$$

$$f'(x) - f'(x) = 0$$

נכתוב:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = k(x,h)$$

נעביר אגפים:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + k(x+h)$$

נעביר אגפים:

$$f(x+h) - f(x) = h\cdot f'(x) + hk\cdot(x,h)$$

נעביר אגפים:

$$f(x+h) = f(x) + h\cdot f'(x) + hk(x,h)$$

נפעיל גבול $h\to0$ על שני האגפים:

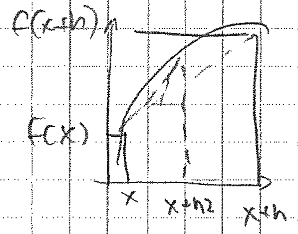
$$\lim_{h\to0} f(x+h) = \underbrace{\lim_{h\to0} f(x)}_{f(x)} + \underbrace{\lim_{h\to0} f'(x)\cdot h}_{f'(x)\cdot 0=0} + \underbrace{\lim_{h\to0} k(x,h)h}_{0}$$

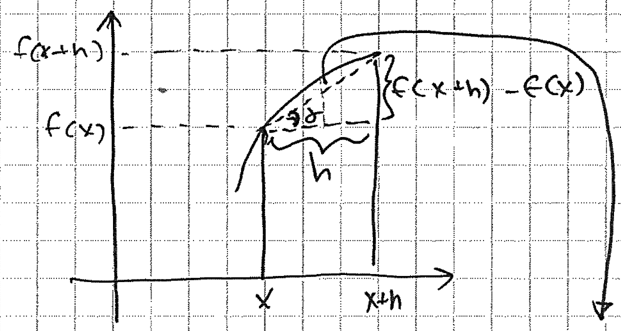
כלומר

$$\underbrace{\lim_{h\to0} f(x+h)}_{\text{גבול מימין ומשמאל (הגבול קיים)}} = \underbrace{f(x)}_{\text{ערך הפונקציה}}$$

דוגמא

המשמעות הגאומטרית של הנגזרת:





$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tan של הזווית θ בזר היא של הישר העובר דרך $(x,f(x))$ ו-$((x+h), f(x+h))$

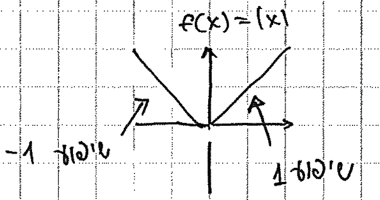
עבור כל h נקבל משהו אחר, שיפוע אחר של ישר אחר.
כל הישרים עוברים דרך $(x, f(x))$
עבור $h \to 0$, שתי נק' החיתוך של הישר מתלכדות.
הישר הופך להיות הישר המשיק
$f'(a)$ אם קיים, הופך להיות השיפוע של הישר אשר משיק לפונק' עם נק' השקה $(a,f(a))$.

ראינו כי בכל נק' גזירות f רציפה. נראה כי קיימת f רציפה שלה אין נגזרת באותן הנקודות.

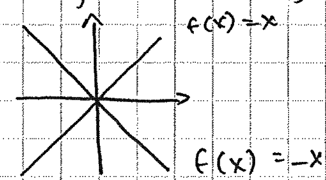
זכרון
(פונקציה טלונה
פונקציה אלמנטרית)

$$f(x)=|x| \begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x\leq 0 \end{cases}$$

אינה יסודית (אינה אלמנטרית)



$\Leftarrow$



$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$$

$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

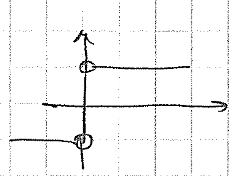
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

לכן לא קיימת f' בנקודה 0.
הגבול שמגיעים את הנגזרת מימין ומשמאל שונים.

מסקנה

לאור $f(x)=|x|$

$$f' = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$



לאור $f(x)=x^2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

<u>המשך הוכחה:</u>

$$(f\cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\left(g(x+h)-g(x)\right) + \left(g(x)\cdot(f(x+h)-f(x))\right)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) =$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} g(x) =$$

$$\lim_{h\to 0} f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x)$$

כיוון ש-f גזירה בנק' x אז היא גם רציפה בנק' x ולכן

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

מסק'

טבלת הנגזרות של הפונקציות היסודיות

1) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

2) א) $(e^x)' = e^x$

ב) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

3) א) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

ב) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

כל הנוסחאות האלה נכונות שמשתמשים ברדיאנים

4) $(\sin x)' = \cos x$

5) $(\cos x)' = \sin x$

6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

7) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

דוגמא!

$$(\sqrt[3]{x} + 6x\cdot \sin x + 2^x + 5x \cdot \log_2 x)' =$$

$$(\sqrt[3]{x})' + 6(x\cdot \sin x)' + (2^x)' + 5(x\cdot \log_2 x)' =$$

$$(x^{\frac{1}{3}})' + 6[(x)'\cdot \sin x + x\cdot(\sin x)'] + (2^x)' + 5\cdot[x'\cdot \log_2 x + x\cdot(\log_2 x)'] =$$

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 6[1\cdot x^0 \cdot \sin x + x\cdot \cos x] + 2^x\cdot \ln 2 + 5[1\cdot \log_2 x + x\cdot \frac{1}{x\ln 2}] =$$

$$\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}} + 6\cdot[\sin x + x\cos x] + 2^x \ln 2 + 5\log_2 x + \frac{5}{\ln 2}$$

בס"ד

(נוסיף קצת עם הוכחות...)

- נזכיר את כלל השרשרת
בסימון של ניוטון:

$$(g\circ f)' = (g'\circ f)\cdot f'$$

חיצונית, פנימית

נתונה פונקציה h, קודם כל צריך לראות אותה בהרכבה $g\circ f$

ואז להשתמש בנוסחה.

<u>דוגמה להסבר כלל השרשרת:</u>

$$(x^6+3x^4+3x^2)' = 6x^5+12x^3+6x = 6x(x^4+2x^2+1) =$$
$$6x(x^2+1)^2 = 3(x^2+1)^2\cdot 2x$$

$$x^6+3x^4+3x^2+\overbrace{1-1}^{\text{מוסיפים}} =$$
$$(x^2+1)^3-1$$

$$\left[(x^2+1)^3\underbrace{-1}_{\text{הנגזרת של 1- היא 0}}\right]' = \left[(x^2+1)^3\right]' = \left[(x^2+1)^3\right]' = 3(x^2+1)^2\cdot 2x$$

נזהה את הביטוי שמאל כנגזרת של הרכבה.

$$x \xrightarrow{f} x^2+1 \rightarrow$$
$$t \xrightarrow{g} t^3$$

נגדיר $f(x)=x^2+1$ $\quad g(t)=t^3$

נחזור על $(g\circ f)(x) = g(f(x)) =$
$$(f(x))^3 = (x^2+1)^3$$

$$g' = 3t^2$$
$$f' = 2x$$

$$(g\circ f)' = (g'\circ f)\cdot f'$$

$$3(x^2+1)\cdot 2x$$

דוגמה נוספת: $(x^2+1)^{100}$

$f(x)=x^2+1$ $\quad f'=2x$

$g(t)=t^{100}$ $\quad g'=100t^{99}$

$$100(x^2+1)^{99}\cdot 2x$$

המשך

דוגמה נוספת!

$$\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)'$$

$f' = 2x \qquad f(x) = x^2+1$

$g' = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \qquad g(t) = \sqrt[3]{t}$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \cdot 2x$$

שימושי הנגזרת

כלל לופיטל:

נתונות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ המקיימות כי $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ או ∞

ונניח כי $\exists f'(x), g'(x)$

וכי קיים $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

אזי

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

דוגמה

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ כלל לופיטל מתקיים

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

דוגמה 2

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ כלל לופיטל מתקיים

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

דוגמה 3

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+4}{n^2+5n+7} = \frac{\infty}{\infty}$ כלל לופיטל מתקיים

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+5} = \frac{\infty}{\infty}$ כלל לופיטל מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

בס"ד

זהירות בכלל לופיטל:

לא להתבלבל!

אסור להשתמש בכלל לופיטל לא ב $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to0} \frac{2+x}{1+x} = \frac{2}{1} = 2$$

כאן יכולנו להתבלבל ולבצע נגזרות: $\lim_{x\to0} \frac{1}{1} = 1$

- אסור להשתמש בכלל לופיטל אלא רק במקרה של $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$
- אסור להתבלבל עם נגזרת של מנה למרות שגם בלופיטל יש נגזרות ויש מנות.

דוגמה:

$$\lim_{x\to0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{0}{0} = \lim_{x\to0} \frac{1}{1} = 1$$

נגזרת כמנה אסור

$$\lim \left(\frac{x}{x}\right)' = \lim \frac{x'\cdot x - x\cdot x'}{x^2}$$

- למרות שכלל לופיטל הוא מאוד חזק, יש תרגילים שהוא לא מצליח לפתור.

דוגמאות:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} =$$

תרגיל נפתור לא לפי לופיטל

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

1.1.17 — חדו"א

* אתר עם סרטונים - yonijvan.com
lectures

<u>כללי לופיטל</u>

כללי לופיטל (מלמטלה) רק עבור $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$.
אבל יש דרך אלגברית להפוך אותם עבור המקרים $0\cdot\infty$:
0^0, 1^∞, ∞^0

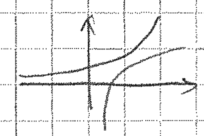
נושא שלנו: כל ביטוי ששואף ל- $0\cdot\infty$ ניתן לכתוב בשתי צורות שונות: כ- $\frac{\infty}{\infty}$ וגם $\frac{0}{0}$.

$0\cdot\infty$ < $0 : \frac{0}{0}$ / $\infty : \frac{\infty}{\infty}$ (?)

<u>דוגמאות:</u>

חשב את: $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$

$y=\ln x \xrightarrow{\text{פונק' הפוכה}} x=e^y$



$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x \to \lim \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$

$\to \lim \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{0}{0}$

אפשר לחשב את הגבול מתוך איזשהו אחד משני הביטויים השקולים
על..

*גזירה מונה לחוד ומכנה לחוד (סימון $\stackrel{L}{=}$)

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+} -\frac{x^2}{x} =$

$\lim\limits_{x\to0^+} -x = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$

איך מבטאים ביטוי מהצורה 1^∞, 0^0, ∞^0 כך שאפשר יהיה להשתמש בכלל לופיטל? (אלגברה יותר ארוכה).
- קשר בין פונק' ופונק' הפוכה:

$\sqrt{x^2} = x \quad (x>0)$
$\sqrt[3]{x^3} = x \quad (\text{לכל } x)$

הרכבה של פונק' ופונק' הפוכה מבטלת זו את זו.
$\arcsin(\sin x)=x$ (בתחום הנכון) לדוגמה
$y=e^x$, $y=\ln x$ פונק' הפוכות זו לזו, ולכן
$e^{\ln x}=x$
הפעלת פונק' ופונקציה הפוכה על אותו x מבטלות זו את זו.

מסק'

עי' הגזרת x^x

$$e^{\ln x^x} = x^x \qquad (\ln a^b = b\ln a)$$

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\overset{\text{תרגיל קודם}}{\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\ln x}}} = e^0 = 1$$

$f(x)^{g(x)}$ מקום השלבים קשומוש בלי שהופיטל עבור המקרים של כאשר הפונק' שואפות ל- 0^0 או 1^∞ וגו ∞^0

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

המוגוי $g(x)\ln f(x)$ תמוג וישאף ל- 0 כפול ∞ כאשר

$$f(x)^{g(x)} = 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

ומכאן נמשיך מקודם.

<u>דוגמא</u>

חשב את הגבול:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

חישבנו עבור $n=x$ וקבלנו e, אבל רוצים לעשות בדרך החדשה.

פתרון:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \pm\infty\cdot 0 \Rightarrow \frac{\ln 1+x}{x} = \frac{0}{0}, \qquad \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln(1+x)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} =$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim \frac{\frac{1}{1+x}\cdot 1}{1}} =$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}} = e^{\frac{1}{1+0}} = e^1 = e$$

סיכום הדרך:

נתון ביטוי $f(x)^{g(x)}$ ונתון כי $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0^0$ או ∞^0 או 1^∞

אז לפי הגדרת פונק' הפוכות:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} \overset{\text{לפי תכונות ln}}{=} e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{0\cdot\infty}$$

נוסף

לוקחים את $g(x)\cdot \ln f(x)$, מעבירים לשבר מונה, וגוזרים את היותר קל. לפי כלל לופיטל.

תרגילים

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = (1+0)^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}} = e^{\lim \frac{\ln(1+\sin x)}{x}} = \frac{0}{0} =$$

$$e^{\lim \frac{\frac{1}{1+\sin x}\cdot \cos x}{1}} = e^{\lim \frac{\frac{1}{1+0}\cdot 1}{1}} = e^1 = e$$

נגזרות של פונק' חזקה שבהן יש x גם בבסיס וגם במעריך:

- חשב את הנגזרת של x^x, אותו טריק כמו קודם

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x} \qquad \left[(e^x)' = e^x \quad \text{תזכורת}\right]$$

$$(x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\cdot [x\ln x]' = e^{x\ln x}\left[1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x}\right] =$$

$$e^{x\ln x}[\ln x + 1] = x^x(\ln x + 1)$$

הערה: נגזרת של פולינום היא פולינום בעל דרגה יותר קטנה.
אבל הנגזרת של x^x היא (פונקציה נוספת) $x^x\cdot$
הנגזרת של x^x יותר מסובכת מהפונק' x^x.

דוגמאות:
חשב את

$$\left[(x^2+1)^{\ln x}\right]' = ?$$

$$y = \left[(x^2+1)^{\ln x}\right] = e^{\ln\left[(x^2+1)^{\ln x}\right]} = e^{\ln x\cdot \ln(x^2+1)}$$

$$y' = e^{\ln x\cdot \ln(x^2+1)}\cdot\left[\frac{1}{x}\cdot \ln(x^2+1) + \frac{\ln x}{x^2+1}\cdot 2x\right] =$$

$$(x^2+1)^{\ln x}\cdot\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x} + \frac{2x\ln x}{x^2+1}\right]$$

בס"ד

שימושי הנגזרת:

1. הנגזרת היא שיפוע המשיק.
2. כלל לופיטל.
3. חקירה מלאה.

טענות בלי הוכחות (אולי נוכיח בהמשך):

1. נתונה פונק' ונתון כי f' חיובית בקטע (a,b) אז בקטע (a,b) f עולה.
2. נתונה פונק' $f(x)$ ונתון כי f' שלילית בקטע (a,b) אז בקטע (a,b) f יורדת.

* הגדרה: נתונה פונק' $f(x)$ ונתונה a ונתון כי קיים $\varepsilon>0$ כך שבקטע $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ל- f המצומצמת יש מקסימום, אז נגיד כי a נק' מקסימום מקומית.
אם בקטע $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ יש ל- f המצומצמת מינימום אז נגיד כי a נק' מינימום מקומית.
נק' קיצון מקומית היא נק' מקס' או מינ' מקומית.

3. בנק' קיצון מקומית f מוגדרת ו- $f'=0$ או ש- f' לא קיימת.
4. נתונה פונק' f ונתון כי $f''=(f')'$ חיובית בקטע (a,b) אז בקטע (a,b) קמורה/קעורה כלפי מעלה/מחייכת.
5. נתונה פונק' f ונתון כי f'' שלילית בקטע (a,b) אז בקטע (a,b) f קעורה/קמורה כלפי מטה/עצוב.
6. נק' פיתול היא נק' מעבר מתחום חיוך לתחום עצב.
7. בנק' פיתול $f''=0$ או ש- f'' לא מוגדרת.

דוגמאות

* $f(x)=ax+b$
$f'=a$

$a>0$ הפונק' עולה
$a<0$ הפונק' יורדת
מתאים למה שידוע

* $f(x)=ax^2+bx+c$
$f'=2ax+b$
$f''=2a$

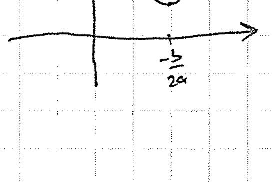
$f'=0$
$2ax+b=0$
$x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow$ ציר הסימטריה של הפרבולה.
$a>0$ פרבולה מחייכת
$a<0$ פרבולה בוכה

מהו תחום העלייה של הפרבולה כש $a>0$?

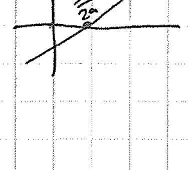
$2ax+b>0$
$2ax>-b$ (a חיובי)
$x>\frac{-b}{2a}$

הפרבולה עולה מימין לציר הסימטריה:
ולכן יורדת משמאל לציר הסימטריה שלה.

גרף של f:



גרף של f':



בס"ד

* $y = x^3 - 3x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y'' = 6x - 6$

$y'' = 0 \to x = 1$

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, \; x = 2$

הישר מתחלק ל-3 קטעים:

$0 \quad 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
y			
y'	+	−	+

$0 \quad 1 \quad 2$

y'	עולה +	יורדת −	יורדת −	עולה +
y''	קעורה −	קעורה −	מחייבת +	מחייבת +
	עולה וקעורה	יורדת וקעורה	יורדת ומחייבת	עולה ומחייבת

$x=0$ מק' מקומי

$x=1$ פיתול

$x=2$ מינ' מקומי

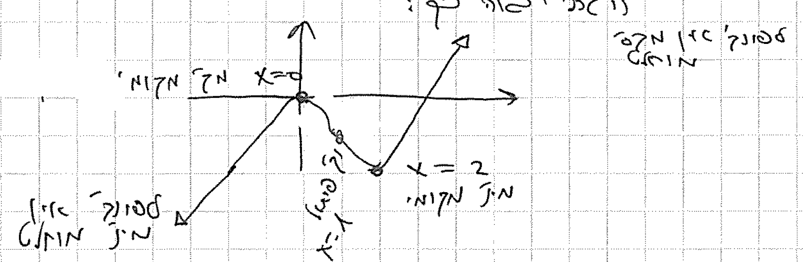
איך בודקים היום $x=0$ הוא המקס' של הפונקציה.

$y(x=0) = 0$

$y(x=2) = -4$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x}\right) = \infty \cdot (1-0) = \infty$$

הגרף יראה כך:



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x}\right) = (-\infty)^3(1-0) = -\infty$$

נוסף

אסימפטוטות:

מהי משוואת ישר במישור:

$y=ax+b$
$(a=0)$ $y=c$ } הישרים המשופעים $y=ax+b$

$x=c$ } הישרים שאינם משופעים, מקבילים לציר y $x=c$. ישרים אנכיים.

הגדרה: 2 סוגי אסימפטוטות:
$x=c$ – אסימפטוטה אנכית
$y=ax+b$ אסימפטוטה משופעת.

* מתי הישר האנכי $x=c$ הוא אסימפטוטה אנכית של $y=f(x)$?
- תנאי ראשון - $x=c$ איננה בתחום ההגדרה של f.
- ובנוסף, מתקיימת אחת לפחות מהאפשרויות הבאות:

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty$$

- כתיבה מקוצרת של (התנאי השני):

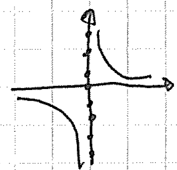
$$\lim_{x\to c^\pm} f(x)=\pm\infty$$

דוגמאות:

* $y=\frac{1}{x}$

אסימפטוטה אנכית $x=0$
$x=0$ לא בתחום הגדרה

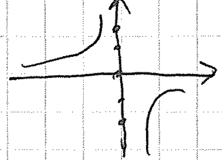
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$



* כל קיום של גבול נסתר מצביע על פעם נוספת שבו הצדדים נבדק לשם. לכן נצטרך לבדוק את שני הגבולות (גם מימין וגם משמאל).

* $y=-\frac{1}{x}$

תהיינה ההתנהגויות האחרות:



קסס

⊛ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

אם x איננה בתחום ההגדרה אז $x=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$x=0$ איננו ישר אסימפטוטה אנכית.

⊛ מהי הישר המשופע $y=ax+b$ הינו אסימפטוטה משופעת עבור $y=f(x)$?

צריך לבדוק לחוד עבור $x\to\infty$ ולחוד עבור $x\to-\infty$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left((f(x)) - ax\right)$$

אופקית $y=b$ כלומר $a=0$

<u>דוגמאות</u>

* מצא אסימפטוטה משופעת עבור

$$y = \frac{(x^2+1)}{x+1}$$

(סעיף 1) $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2+1}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x(x+1)} = 1 \;\boxed{\Rightarrow a=1}$

את a שמצאנו בסעיף הראשון, נציבים בנוסחה עבור b:

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - 1\cdot x\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+1}{x+1} = -1 \;\boxed{\Rightarrow b=-1}$$

לשנייה צריך לעשות את אותם הגבולות עבור $x\to-\infty$
<u>אבל</u> עבור f פונק' רציונלית $\left(\frac{\text{פולינום}}{\text{פולינום}}\right)$ אין צורך לבדוק.
[משפט <u>בלי הוכחה</u> - אם יש אסימפטוטה משופעת מ- $(+\infty)$ אז
ויש אותה אסימפטוטה משופעת ב- $(-\infty)$ והפוך]
ולכן אותה אסימפטוטה משופעת קיימת ב- $(+\infty)$ וב- $(-\infty)$
$y = ax+b = 1\cdot x - 1 = x-1$

נספח

* דוגמה לפונק' שעבורה אין אסימפטוטה משופעת למרות ש-a יוצא סופי (נופלים בשלב ה-b):

$y=\sin x$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

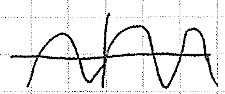
$$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\boxed{0=a}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(fx-ax)=\lim_{x\to\infty}(\sin x-0\cdot x)=$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\sin x=$$ לא קיים!



$\leftarrow \sin x$

מכיוון ש-f מקבלת את כל הערכים בין (1-) ל-1 ∞ פעמים, הגבול לא קיים – $a=0$, b לא קיים

ונבדוק ב- $-\infty$

$$-1\le\sin x\le 1$$

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to(-\infty)}-\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to(-\infty)}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to(-\infty)}\frac{\sin x}{x}=0$$

$$b=\lim_{x\to(-\infty)}(\sin x-0\cdot x)=\lim_{x\to(-\infty)}\sin x$$

ושוב $\sin x$ מקבלת את כל הערכים בין ±1 ולכן לא קיים הגבול

תזכורת:

$y=ax+b$
$a=$ שיפוע
$b=$ נק' חיתוך עם ציר ה-y

בס"ד

$\sin x$ הינה פונק' אי-זוגית

הגדרה: נתונה פונקציה $f: D \to R$

הפונק' תקרא זוגית אם

א. D קבוצה סימטרית ביחס לראשית

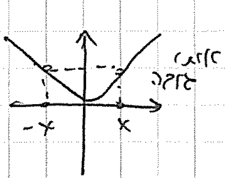
ב. לכל $x \in D$ $f(-x) = f(x)$

דוגמה לפונק' זוגית: $y = x^2 : R \to R$

סימטריה של תחום ההגדרה: $x \in R \to (-x) \in R$

תנאי שני:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



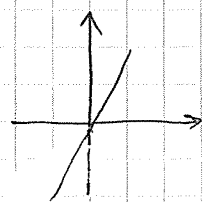
הפונק' תקרא אי-זוגית אם:

א. D קבוצה סימטרית

ב. לכל $x \in D$ $f(-x) = -f(x)$

דוגמה: $y = 2x : R \to R$

$x \in R \to -x \in R$



גם בפונק' זוגית וגם בפונק' אי-זוגית, מספיק לדעת חצי מהגרף ולהשלים אותו בחצי השני.

נרחיב לתרגיל (מבחן): כיוון שאין אסימפטוטה עבור $y = \sin x$ כאשר $x \to \infty$ וכיוון ש- $\sin(x)$ אי-זוגית, לכן גם אין אסימפטוטה משופעת עבור $y = \sin x$ כאשר $x \to (-\infty)$.

8.1.16 בס"ד

קיצון מוחלט על קטע סגור

נתונה $f:[a,b]\to R$
אשר רציפה בקטע $[a,b]$
וגזירה בקטע (a,b)
ונתונה נק' c $a\le c\le b$
כך ש- $f(c)$ מקסימלי

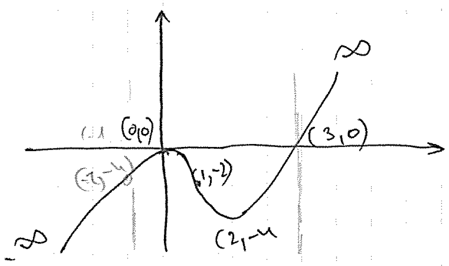
אז תתכנה 2 אפשרויות:

א. $a\ne c\ne b$ נק' פנימית ואז $f'(c)=0$ או לא מוגדר.
ב. $c=a$ או $c=b$ נק' קצה.

<u>דוגמאות:</u>

$$f(x)=x^3-3x^2$$

		0		1		2	
f'	+		−		−		+
f''	−		−		+		+



נניח קטע סגור: $[-1,+3]$
מקס' על הקטע: $(0,0),\ (3,0)$
מין' על הקטע: $(-1,-4),\ (2,-4)$

* $x=-1$ נק' קצה.
 $f'(-1)=9$
* $x=0$ פנימית
 $f'(0)=0$
* $x=2$ פנימית
 $f'=0$
* $x=3$ קצה
 $f'=9$

נניח קטע סגור: $[-2,5]$

$f(-2)=-20$
$f(5)=50$

עכשיו הקטע הזה -2 מינימום, נק' קצה ($f'=24$)
-1 $x=5$ מקסימום, נק' קצה ($f'=45$)

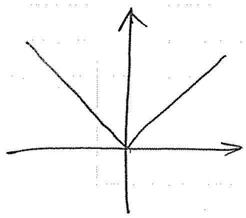
<u>סיכום</u>

מקס' ומין' מקומיים הם תלויי קטע ההגדרה.
כל אחד כזה הוא או פנימי ואז $f'=0$ או שלא מוגדר <u>או</u> נק' קצה.

בס״ד

תשובה לשאלה של גיא:

נגיד ש:



$$f(x) = |x| : R \to R^+$$

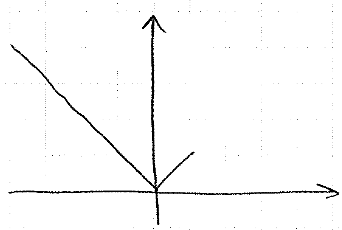
$f'(0)$ לא קיים

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$$

ובכל אופן $(0,0)$ מין' מקומי וגם מוחלט.

* עבור הקטע $[-4,1]$



מקס' עבור קטע זה $(-4,4)$

מין' עבור קטע זה $(0,0)$

-4 נק' קצה.

0 נק' פנימית

$f'(0)$ לא מוגדר.

$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$

* דוג' אחרונה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} : R$$

$$\Downarrow$$

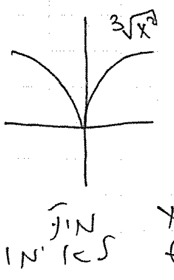
$$(\sqrt[3]{x})^2$$

$$f' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

0 בתחום של f

0 לא בתחום של f'

$$\begin{cases} f' > 0 & x > 0 \\ \text{לא מוגדר} & x = 0 \\ f' < 0 & x < 0 \end{cases}$$



$x=0$ מין' מקומי ומוחלט

$f'(0)$ לא מוגדר

בס"ד

דוגמה לחקירה מלאה:

סעיפים:

1. ת"ה
2. סוגה
3. זוגיות
4. f'
5. f''
6. עלייה וירידה (קמירות/קעירות)
7. נק' קיצון, פיתול
8. אסימפטוטות אנכיות
9. אסימפטוטות משופעות
10. גמונה מדויקת.

דוגמה:

$$f(x)=\frac{x^2+8}{x+1}$$

1+2. ת"ה $f: R-\{-1\} \to R$

3. ת"ה סימטרי? לא

ת"ה $1 \in$ } לכן ת"ה אינו סימטרי

ת"ה $-1 \notin$ } אי אפשר לבדוק זוגיות ואי זוגיות.

הגדרה פורמלית: נתונה פונק' ממשית

$f: D \to R$

נבדוק כי f זוגית או אי זוגית רק אם D קב' סימטרית ($x \in D \Leftarrow -x \in D$)

$D=R-\{-1\}$ אינה סימטרית.

אי אפשר לבדוק זוגיות או אי-זוגיות.

התנאי לזוגיות: $f(-x)=f(x)$

התנאי לאי-זוגיות: $f(-x)=-f(x)$

4.
$$f'=\frac{2x(x+1)-1(x^2+8)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2-8}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}=$$

$$\frac{(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$$

5. נב המונה

$$f''=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)\cdot 1\cdot(x^2+2x-8)}{(x+1)^4}=$$

$$\frac{2(x+1)\left[(x+1)^2-(x^2+2x-8)\right]}{(x+1)^4}=$$

$$\frac{2(x+1)}{(x+1)^4}\left[(x^2+2x+1)-(x^2+2x-8)\right]$$

$$\frac{2\cdot(x+1)\cdot 9}{(x+1)^4}=\frac{18(x+1)}{(x+1)^4} \to$$ במונה לא מצמצמים, כדי שנדע מוצאות שהמונה חיובי

המשך

סיכום

$$f=\frac{x^2+8}{x+1}$$

$$f'=\frac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$$

$$f''=\frac{18(x+1)}{(x+1)^4}$$

6. כל הנק' בהן אחת מ- f, f', f''
לא מוגדרות או בהן f', f'' הן 0.

-4, 2, -1

מצורים על ציר ממשי ומחלקים לקטעים:

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
f'	+	−	−	+
f''	−	−	+	+

7. נק' המעבר:

$x=-4$ מקס' מקומי

$x=-1$ עוברת מקמור לקעור אבל לא בת"ה ולכן לא נק' פיתול

$x=2$ מינ' מקומי

(מאונך דומה במובן הזה x^3-3x^2)

8. אסימפטוטות:

אנכיות:

$x=-1$ איננו בת"ה

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+8}{x+1}=\frac{9}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2+8}{x+1}=\frac{9}{0^+}=\infty$$

$x=-1$ אסימפטוטה אנכית שלה הגרף נפגש פעמיים, פעם
מימין ופעם משמאל.

מס״ק

9. <u>משמעות:</u>

$\frac{x^2+8}{x+1}$ פונק׳ רציונלית

מספיק לבדוק אסי׳ מפטוטה כאשר $x\to\infty$

רציונלית $= \frac{\text{פולינום}}{\text{פולינום}}$

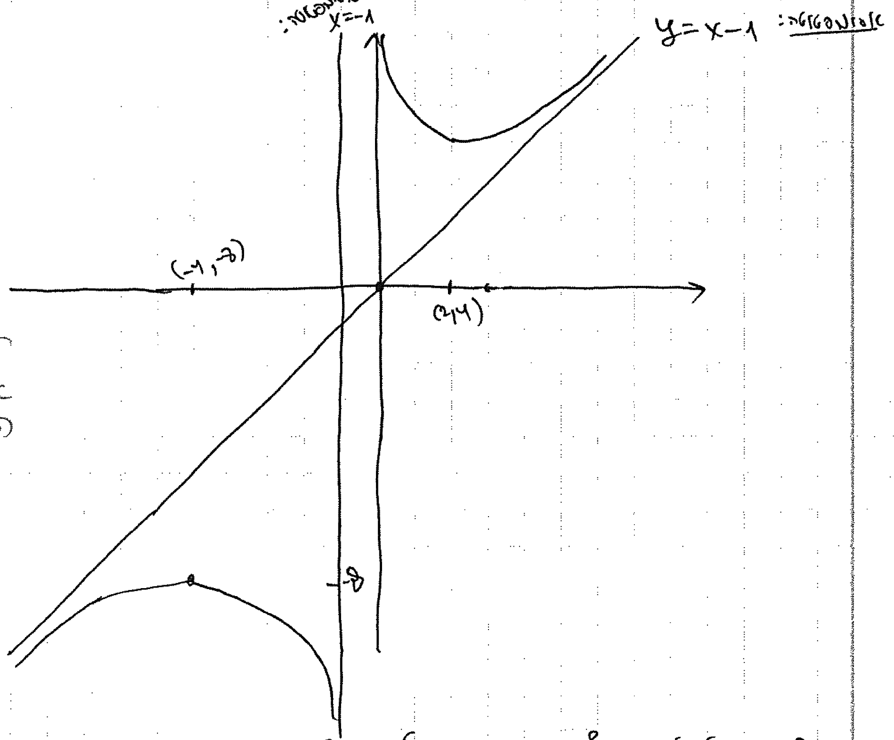
$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+8}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8}{x(x+1)}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8}{x+1}-1\cdot x=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8-x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+8}{x+1}=-1$$

$$y=1\cdot x-1=x-1$$

ישנו אסימפטוטה משופעת ב- $x\to\infty$
$x\to-\infty$



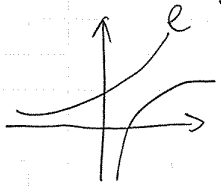
לפונקציה רציונלית יש
אסימפטוטה משני צידי
הפונקציה או אין בכלל

בתחום לפי הגרף השלם של f
$(-4,-8)$ נק׳ מקס׳ מקומית רק עבור $(-\infty,-1)$
$(2,4)$ נק׳ מינ׳ מקומית רק עבור $(1,\infty)$

עבור y $-8<y<4$
לא קיים אף x כך ש- $f(x)=y$

בס"ד

חקירה מלאה II



$e^x : R \to (0,\infty)$

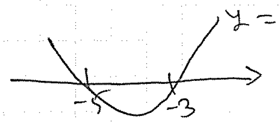
$\ln x : (0,\infty) \to R$

$\frac{x+3}{x+5} > 0$

$y = \ln\left(\frac{x+3}{x+5}\right)$

ת"ה $\ln x$ מוגדרת $(x+3)(x+5) > 0$

$\Downarrow$



ת"ה: $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$

טווח: כל R

$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

נק' חיתוך עם הצירים: אין. ת"ה אינו סימטרי.

$$y = \ln\left(\frac{x+3}{x+5}\right) = \ln(x+3) - \ln(x+5)$$

$$y' = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{(x+5)-(x+3)}{(x+3)(x+5)} = \frac{2}{(x+3)(x+5)} =$$

$$2\left[(x+3)(x+5)\right]^{-1}$$

$$y'' = 2(-1)\left[(x+3)(x+5)\right]^{-2} \cdot \left[x+5+x+3\right] =$$

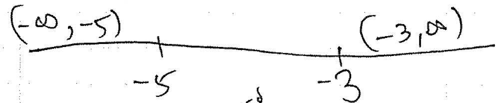
$$\frac{-2(2x+8)}{(x+3)^2(x+5)^2} = \frac{-4(x+4)}{(x+3)^2(x+5)^2}$$

סימנים:

$$f = \ln\left(\frac{x+3}{x+5}\right) \qquad f' = \frac{2}{(x+3)(x+5)}$$

$$f'' = \frac{-4(x+4)}{(x+3)^2(x+5)^2}$$

(אין -4 בתחום הגדרה) [אין חשיבות של f' ו f'' מחוץ ת"ה] *



	$(-\infty,-5)$		$(-3,\infty)$
f'	+	אין בתחום	+
f''	+	אין בתחום	−
	∪		∩

בס"ד

אסימפטוטות:

אנכיות:

אין ב- $(-5)^+$ $\lim\limits_{x\to(-5)^-} = \ln\left(\frac{-2}{0^-}\right) = \ln(\infty) = \infty$

לכן ב- $x=-5$ ישנה אסימפטוטה אנכית כי הוא אינו בתחום ההגדרה וגם $f(x)$ נבדקת אולי פעם אחת משמאל.

$x=-3$ לכן מג"ה:

$$\lim_{x\to(-3)^+} \ln\left(\frac{x+3}{x+5}\right) = \ln\frac{0^+}{2} = \ln 0^+ = -\infty$$

וגם ב- $x=(-3)$ ישנה אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה משופעת: $(\pm\infty)$

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+3)-\ln(x+5)}{x} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+3)}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{x} = \frac{\infty}{\infty}-\frac{\infty}{\infty} =$$

לפי לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x+3}}{1} - \frac{\frac{1}{x+5}}{1}\right) = \frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty} = 0-0=0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-0\cdot x) = \lim_{x\to\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{(x+3)}{(x+5)} = \lim_{x\to\infty}\ln(1) = \lim 0 = 0$$

$$a=b=0$$

ישנה אסימפטוטה (כזו) $y=0x+0=0$

$x \to -\infty$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+3}{x+5}\right)}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

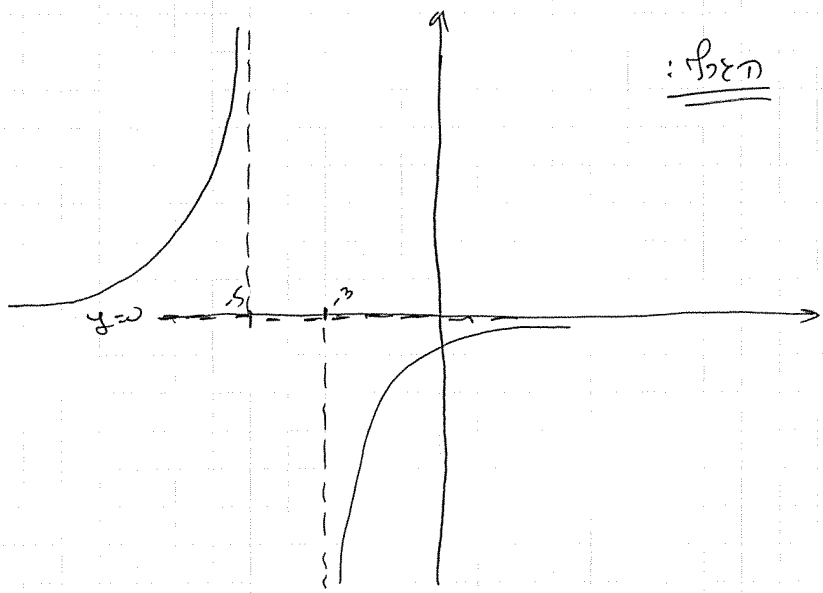
$$b = \lim_{x\to(-\infty)} (f(x) - 0\cdot x) = \lim_{x\to(-\infty)} \ln\left(\frac{x+3}{x+5}\right) =$$

$\ln(1) = 0$

$y = 0x + 0$
$y = 0$

קיבלנו אותו ישר אסימפטוטה משופעת ב- ∞ וב- $(-\infty)$ למרות ש- f אינה רציונלית

<u>שרטוט:</u>



* <u>עוד דוגמה:</u> $y = x^3 - 3x^2$

<u>נבדוק אסימפטוטות:</u>

אנכיות? אין - מוגדרת לכל R.

משופעת:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 - 3x = \infty = a$$

אין a סופי, אין אסימפטוטות $\pm\infty$
(אותו הדבר עבור $-\infty$ כי פולינום הוא רציונלי)

מס"ק

* משפט Fermat

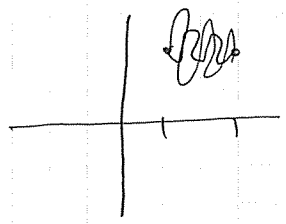
נניח כי f מוגדרת בקטע פתוח המכיל את a ובאזורו הקטע היא רציפה וגזירה וב- a יש מקס' ומין מקומי
אז $f'(a)=0$

* משפט Rolle

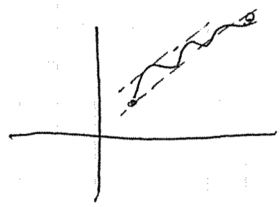
f מוגדרת רציפה בקטע $[a,b]$
וגזירה בקטע (a,b)

ו- $f(a)=f(b)$

אז: קיימת c $a\le c\le b$ כך ש- $f'(c)=0$



* משפט lagrange



משפטים אודות פונקציות גזירות

משפט Fermat

נתונה $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

נתון כי f רציפה וגזירה בכל נקודות הקטע הפתוח ונניח כי

c נק' בקטע $a<c<b$

שבה יש ל-f קיצון מקומי

אז $f'(c)=0$

הוכחה: ישנם שני מקרים - קיצון יכול להיות מקסימום או מינימום.

נוכיח רק עבור מקסימום, ההוכחה עבור מינימום דומה.

מניחים כי c נק' מקסימום מקומי ו- $f'(c)$ מוגדרת.

$$f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

לפי ההנחה עבור ε קטן $f(c)$ מקסימלי.

$$f(c+h)\le f(c)$$

$$f(c+h)-f(c)\le0$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

נפרק לגבולות חד צדדיים:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{\text{מונה}\le0}{\text{מכנה}>0}$$

המונה שלילי תמיד לכן קטן שווה ל-0

לכן
$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le0$$

נחשב את:
$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

במקרה זה
$$f(c+h)-f(c)\le0 \qquad h\le0$$

מנה חיובית
$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge0$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c)$$

קיים ומקיים

$$0\le f'(c)\le0$$

ולכן
$$f'(c)=0$$

בס"ד

משפט Rolle

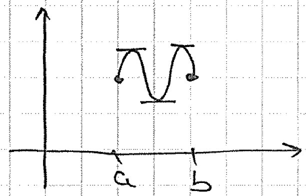
נתונה $f:[a,b]\to R$

מוגדרת ורציפה על נק' הקטע הסגור וגזירה על נק' הקטע הפתוח.

ו- $f(a)=f(b)$ אז קיימת נק' c אחת לפחות כך ש:

$$a<c<b$$

$$f'(c)=0$$



הוכחת משפט Rolle:

כיוון ש- f רציפה על הקטע הסגור $[a,b]$ אז לפי משפט' weierstrass ל- f יש נק' מקסימום מוחלט d.

הנק' d יכולה להיות פנימית או חיצונית

אם d פנימית אז ב-d יש גם מקס' מקומי, ואז לפי משפט Fermat $f'(d)=0$.

d פנימית $a<d<b$

נותר המקרה ש-d נק' קצה.

לפי משפט' weierstrass יש ל-f גם נק' מינימום מוחלט על הקטע $[a,b]$, נסמן אותה ב-c.

האפשרויות של c - או ש-c פנימית או ש-c בקצה.

אם c פנימית אז ב-c יש ל-f מינימום מקומי, ואז לפי משפט Fermat $f'(c)=0$

נותר המקרה ש-c בקצה.

נותר המקרה שגם המקס' המוחלט וגם המינ' המוחלט c הם בקצוות.

$$\{c,d\}=\{a,b\}$$

מכיוון ש- $f(a)=f(b)$

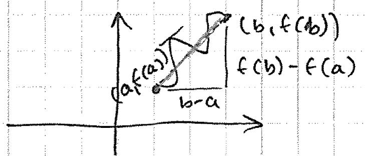
המקסימום שווה למינימום - f קבועה בקטע $[a,b]$ (הגרף מקביל לציר ה-x). ואז $f'=0$ בכל נק' הקטע.

משפט Lagrange

נתונה f $f:[a,b]\to R$

רציפה בנק' $[a,b]$ וגזירה בנקודות (a,b) אז קיימת c אחת לפחות כך ש $a<c<b$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ (שיפוע המשיק)



המשיק לפונק' בנק' c מקביל לישר המחבר את $(a,f(a))$ עם $(b,f(b))$.

מה הקשר בין משפט Lagrange ובין משפט Rolle?

Rolle הוא מקרה פרטי של מש' Lagrange מכיוון שההנחה ש- $f(a)=f(b)$ גוררת ש- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ והמשפט מבטיח שקיימת c אחת לפחות כך ש- $f'(c)=0$

קס״ם

הוכחת משפט Lag מאוד דומה להוכחת משפט Rolle עם שינויים.

הרעיון של הוכחת משפט Lag:

בונים בניית עזר ואז הפונק' הופכת להיות כמו במשפט Rolle ואז מסתמכים על משפט Rolle מוכח ע"י ספרון בגרל הקודם

נגדיר $g(x)$ ע"י:

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g(x)-f(a)=\frac{x-a}{b-a}(f(b)-f(a))$$

$$g(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{(b-a)}(f(b)-f(a))$$

מהן תכונות g?

זו פונקציה ליניארית במשתנה x

$$g(a)=f(a)+0\cdot\ldots=f(a)$$
$$g(b)=f(a)+\frac{b-a}{b-a}\cdot(f(b)-f(a))=f(b)$$

כלומר g פונקציה ממעלה ראשונה אשר עוברת בנק' $(a,f(a))$ $(b,f(b))$

רוצים לסובב את כל הציור כך שיתקבל מצב כמו במשפט Rolle

נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$

מהן תכונות h?

f רציפה על $[a,b]$

g פולינום רציף על R

לכן h הפרש של שתי פונקציות רציפות על $[a,b]$

לכן $h(x)$ רציפה על הקטע $[a,b]$.

f גזירה בקטע הפתוח (a,b)

g ליניארית גזירה על כל R

לכן $d(x)=f(x)-g(x)$

גזירה על הקטע (a,b) כהפרש של שתי גזירות.

ומכאן $h(x)=f(x)-\underbrace{\left(f(a)+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)(f(b)-f(a))\right)}_{g}$

$$h(a)=f(a)-f(a)=0$$
$$h(b)=f(b)-f(b)=0$$

h מקיימת את תנאי משפט Rolle ולכן קיימת c אחת לפחות כך ש $a<c<b$

$$h'(c)=0$$

$$h'(x)=f'(x)-\left(0+\frac{1-0}{b-a}\right)(f(b)-f(a))=$$
$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$h'(a)=f(a)-f(a)=0$$

המשך

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

נעביר אגפים:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

<u>משפט ערך הביניים של קושי:</u>

נתונות פונקציות $f,g:[a,b] \to R$ כך ש- f ו- g רציפות בקט' הקטע $[a,b]$, גזירות בקט' הקטע (a,b) ונתון ש- $g' \neq 0$ בכל נק' של הקטע (a,b) אז קיימת נק' c כך ש $a<c<b$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

תצי הוכחה של גנגול:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

לא הוכחה מלאה.

אבל מדוע $c_1=c_2$? מפיל את ההוכחה.

נשים לב שעבור המקרה הפרטי $g(x)=x$, משפט קושי הופך להיות משפט Lagrange

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

משפט קושי יותר כללי ממשפט Lagrange.

נחזור על הוכחת משפט Lagrange ונשנה את הפונק' h.

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b)-f(a))\right)$$

ועכשיו:
$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{g(x)-g(a)}{g(b)-g(a)}(f(b)-f(a))\right)$$

מהן תכונות h?

- כשרות ההגדרה של h
  אסור לחלק ב-0.
  האם $g(b)=g(a)$?
  אם היה מתקיים $g(a)=g(b)$ אז g הייתה מקיימת את משפט Rolle (רציפה, גזירה, $g(a)=g(b)$). היה נובע שקיימת d כך ש- $a<d<b$ כך ש- $g'(d)=0$, סתירה להנחה כי לכל x, $a<x<b$; $g'(x) \neq 0$
  לכן $g(b)-g(a) \neq 0$ ו- h מוגדרת היטב.
- המקדמים $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ ו- $f(a)$, $g(a)$ קבועים.

ההופעה היחידה של x היא ב- $f(x)$ ו- $g(x)$ והללו פונק' רציפות וגזירות. כל שאר הפעולות הן חיבור, חיסור וכפל וחילוק של קבועים ביחס לפונק' $f(x)$, $g(x)$.

הוכחה

לכן $d(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b)
ונגדיר:

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{g(x)-g(a)}{g(b)-g(a)}\left(f(b)-f(a)\right)\right)$$

ובנוסף:

$$h(c) = f(a) - \left(f(a) + \frac{g(a)-g(a)}{g(b)-g(a)}\left(f(b)-f(a)\right)\right)$$

ולכן $h(c)=0$

ובנוסף:

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{g(b)-g(a)}{g(b)-g(a)}\left(f(b)-f(a)\right)$$

ולכן $h(b)=0$

ולכן h מקיימת את תנאי משפט Rolle.

לכן קיימת c אחת לפחות כך ש: $a<c<b$

$$h'(c)=0$$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$h'(c) = f'(c) - g'(c)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = 0$$

$$f'(c) = g'(c)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

טענה:

נניח ש- נתון הקטע (a,b) ובקטע הזה $f'>0$
יהיו α,β כך ש-

$$a<\alpha<\beta<b$$

$$f(\alpha)<f(\beta)$$

מכאן f עולה.

הוכחה:
לפי משפט Lagr קיימת c כך ש $\alpha<c<\beta$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(c) > 0$$

המונה והמכנה מקיימים אותם הסימנים.

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=\lim_{\substack{x\to b\\ x\le c\le b}}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to b}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

משפט

נתונה פונקציה רציפה וגזירה על הקטע $[a,b]$ ונתון כי $f'\equiv 0$
אז f היא פונק' קבועה.

הוכחה:

לכל x $a\le x\le b$ נוכיח כי $f(x)=f(a)$
נבנה את משפט Lagrange $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
וקיימת c $a<c<x$ כך ש:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0$$

לכן $f(x)-f(a)=0$
לכן $f(x)=f(a)$ לכן f קבועה.

משפט

נתונות פונק' f ו-g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) ונתון כי על הקטע $f'=g'$ אז קיים קבוע D
כך שלכל x

$$g(x)=f(x)+D$$

הוכחה

נבנה את $g-f$
זוהי פונק' רציפה על $[a,b]$ וגזירה על (a,b)!

$$(g-f)'(x)=0$$

לכן לפי המשפט הקודם, קיים קבוע D כך שלכל x

$g(x)=D+f(x)$ או $g(x)-f(x)=D$

בס"ד

אינפי א' - תרגול

ד"ר אורי פנקס

uripinch@gmail.com

שעות קבלה: לפי תיאום מראש.

18.11.16 מס״פ

אינפי - תרגול

N - הטבעיים $1,2,3\dots$

$\mathbb{Z}$ - השלמים $\dots -2,-1,0,1,2\dots$

Q - רציונליים $\frac{p}{q}$ p,q - שלמים $q\neq 0$

R - ממשיים כל המספרים

יחס הכלה: $N\subseteq \mathbb{Z}\subseteq Q\subseteq R$

$\in$ - שייך, למשל $a\in A$ - a שייך ל-A, a איבר בקבוצה A.

טענה: $\sqrt[3]{5}\notin Q$

הוכחה: נניח $\sqrt[3]{5}\in Q$

לכן ניתן לרשום $\sqrt[3]{5}=\frac{p}{q}$ $p,q\in\mathbb{Z}$ וזרים

גורם שלם ,
(אין ~~מחלק~~ משותף
שונה יכול להוציא
משניהם)

$$5=\frac{p^3}{q^3}$$

$5q^3=p^3$ לכן p^3 מתחלק ב-5

לכן גם p מתחלק ב-5

לכן נוכל לרשום $p=5\cdot t$
כאשר $t\in\mathbb{Z}$
ומזה נקבל:

$$5q^3=(5t^3)$$

$$5q^3=125t^3$$

$$q^3=25t^3$$

לכן q^3 מתחלק ב-25 ולכן גם מתחלק ב-5

לכן גם q מתחלק ב-5

p,q מתחלקים ב-5 וזו סתירה לכך
שהם ~~[illegible]~~ זרים.

לכן $\sqrt[5]{3}\notin Q$ ■

מספרים זרים = שני מספרים שלמים נקראים מספרים זרים אם
המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1, כלומר
אין אף מספר גדול מ-1 שמחלק את שניהם.

בעיה

טענה: לכל $m, n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[m]{n}$ שלם או אי רציונלי.

ללא הוכחה בינתיים.

$\sqrt[4]{81} = 3$

$\sqrt[4]{80} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{53} \notin \mathbb{Q}$

אינדוקציה

טענה: $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$

לכל $n \in \mathbb{N}$

הוכחה: מאינדוקציה על n

בסיס: עבור $n=1$, $\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ נכון

עבור $n=2$, $\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ נכון.

הוכחת האינדוקציה:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

צ"ל $(n+1)$:

$$\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

כלומר יש להוכיח כי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cancel{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}\cdot\cancel{\ldots}\cdot\cancel{\left(1-\frac{1}{2n}\right)}=\cancel{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}\cancel{\left(1-\frac{1}{n+3}\right)}\cdot\cancel{\ldots}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)$$

$$1-\frac{1}{n+1}=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)$$

מכנה משותף

$$\frac{n}{n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}$$

בס"ד

$$\frac{\cancel{n}}{\cancel{n+1}} = \frac{\cancel{2}\cdot n\cdot \cancel{(2n+1)}}{\cancel{(2n+1)}\cdot \cancel{2}\cdot (n+1)}$$

נכון $1=1 \rightarrow$.

אי-שוויון הממוצעים

יהיו $a_1,\dots,a_n \in R$ חיוביים

נגדיר $A_n = \frac{a_1+\dots+a_n}{n}$ (ממוצע חשבוני)

$G_n = \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} = (a_1\cdot\ldots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$ (ממוצע גאומטרי)

$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}$ (ממוצע הרמוני)

$A_n \ge G_n \ge H_n$ (אי שוויון הממוצעים אומר את הטענה הבאה)

<u>טענת עזר</u>: יהיו $a,b\in R$ ~~חיוביים~~ חיוביים כך ש $a\ge 1$, $b\le 1$
אזי $a+b\ge ab+1$

<u>הוכחה</u>: נראה כי $1-b\ge 0$ וכן $a\ge 1$, לכן

$a(1-b)\ge 1-b$
$a-ab\ge 1-b$
$a+b\ge ab+1$.

<u>טענת עזר</u>: יהיו $a_1,\dots,a_n\in R$ חיוביים שהמכפלה שלהם היא 1
אזי $a_1+a_2+\dots+a_n\ge n$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על n

<u>בסיס</u>: כאשר $n=1$, $a_1=1$, $a_1\ge 1$ - נכון

כאשר $n=2$, $a_1\cdot a_2=1$ לכן אחד מהם ≥ 1
והשני ≤ 1 . נניח $a_1\ge 1$, $a_2\le 1$ (בה"כ - בלי הגבלת הכלליות)
לפי טענת עזר קודמת $a_1+a_2\ge a_1\cdot a_2+1=2$
נכון

<u>הנחת האינדוקציה</u>: $a_1+a_2+\dots+a_n\ge n$ (כאשר $a_1\cdot\ldots\cdot a_n=1$)

צ"ל: $a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1}\ge n+1$ (כאשר $a_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}=1$)

נניח כי a_{n+1} הוא הגדול מבין המספרים $a_1,\dots,a_{n+1}$ ו- a_n הוא הקטן שבהם (בה"כ).
אזי $a_{n+1}\ge 1$ ו- $a_n\le 1$

נראה כי

$$a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1} \overset{\text{לפי טענת עזר הראשונה}}{\ge} a_1+\dots+a_{n-1}+a_n a_{n+1}+1 \underset{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}{\ge} n+1$$.

אי שוויון הממוצעים - הוכחה:

יהיו $a_1,\dots,a_n \in R$ חיוביים

נגדיר לכל $1 \le i \le n$

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1\cdot \dots \cdot a_n}}$$

אזי כל x_i כנ"ל חיובי, וגם

$$x_1\cdot \dots \cdot x_n = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1\cdot\dots\cdot a_n}}\cdot\dots\cdot\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\cdot\dots\cdot a_n}} =$$

$$\frac{a_1\cdot\dots\cdot a_n}{a_1\cdot\dots\cdot a_n} = 1$$

לכן לפי טענת העזר הקודמת -

$$x_1+\dots+x_n \ge n$$

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1\cdot\dots\cdot a_n}}+\dots+\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\cdot\dots\cdot a_n}} \ge n$$

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot\dots\cdot a_n}$$

$$A_n \ge G_n.$$

נגדיר לכל i $1 \le i \le n$

$$y_i = \frac{1}{a_i}$$

נפעיל על המספרים הללו $y_1,\dots,y_n$

את החלק $A_n \ge G_n$ ונקבל

$$\frac{y_1+\dots+y_n}{n} \ge \sqrt[n]{y_1\cdot\dots\cdot y_n}$$

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}{n} \ge \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\dots\cdot\frac{1}{a_n}}$$

ההרמוני

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$$

$$H_n \le G_n$$

מתי מתקיים שוויון?

אמ"מ (אם ורק אם) $a_1=a_2=\dots=a_n$.

<u>אי שוויון ברנולי</u>: לכל $n\in\mathbb{N}$, $0\le x\in\mathbb{R}$

$$(1+x)^n \ge nx+1$$

<u>הוכחה:</u>

נתבונן ב- n מספרים

$$a_1=a_2=\dots=a_{n-1}=1$$

$$a_n=nx+1$$

אזי כל המספרים חיוביים, לכן, לפי אי-שוויון הממוצעים $(A_n \ge G_n)$, נקבל

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$$

$$\frac{nx+n}{n} \ge \sqrt[n]{nx+1}$$

$$x+1 \ge \sqrt[n]{nx+1}$$

$$(x+1)^n \ge nx+1$$

מס"ק

__ערך מוחלט__

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

__אי שוויון המשולש:__

לכל $a, b \in R$

מתקיים

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

__הוכחה:__ נעלה בריבוע ונקבל אי שוויון שקול (כי שני האגפים אי שליליים)

$$(|a+b|)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

$$(a+b)^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$$

$$\cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} \leq \cancel{a^2} + 2|a||b| + \cancel{b^2}$$

$$\cancel{2}ab \leq \cancel{2}|ab|$$

$$ab \leq |ab| \qquad \text{נכון} \qquad \blacksquare$$

* תרגיל מס' 1.

תרגול מס' 2

תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ (קבוצת מספרים)
אם קיים $M\in\mathbb{R}$, כך שלכל $a\in A$ מתקיים $a\le M$ אז A נקראת חסומה מלעיל (ע"י M).

אם קיים $m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a\in A$, מתקיים $a\ge m$, אז A שלנו נקראת חסומה מלרע (ע"י m).

M - נקרא חסם מלעיל של A.
m - נקרא חסם מלרע של a.

אם M/m חסם מלעיל/מלרע של A, אז כל מס' גדול/קטן ממנו, גם הוא חסם כזה.

A נקראת חסומה אם היא חסומה גם מלעיל וגם מלרע.

<u>אקסיומת השלמות:</u>
אם A חסומה מלעיל/מלרע, אז יש לה חסם מלעיל/מלרע קטן/גדול ביותר.
חסם מלעיל קטן ביותר של A נקרא <u>חסם עליון</u> (סופרימום) של A, ומסומן <u>$\sup A$</u>.
חסם מלרע גדול ביותר של A נקרא <u>חסם תחתון</u> (אינפימום) של A, ומסומן <u>$\inf(A)$</u>.

אם $\sup A\in A$ הוא נקרא <u>מקסימום</u> של A - <u>$\max A$</u>
אם $\inf A\in A$ הוא נקרא <u>מינימום</u> של A - <u>$\min A$</u>

1) $A=\{8, 4\frac{1}{2}, -3, \pi, 0.007\}$

A חסומה מלעיל למשל ע"י 100, לכל $a\in A$ $a\le 100$
נראה כי 8 חסם מלעיל של A;
לכל $M<8$ אינו חסם מלעיל של A (יש איבר ב-A שהוא 8 - הגדול מ-M).
לכן $\sup A=8$.
$8\in A$, לכן $\max A=8$.
A חסומה מלרע, למשל ע"י -3.0001, לכל מס' $a\in A$, $a\ge -3.0001$.
נראה כי -3 חסם מלרע של A
לכל $m>-3$ אינו חסם מלרע של A (יש ב-A איבר -3 ~~גדול~~ קטן מ-m).
לכן $\inf A=-3$
$-3\in A$ לכן $\min A=-3$

בס"ד

מס' סופי של איברים

טענה: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ סופית. אזי A חסומה ויש לה מקסימום ומינימום

"גודל של" מס' האיברים בקבוצה

הוכחה: נסמן $|A|=n$, ונוכיח באינדוקציה על n.

כאשר $n=1$ (בסיס האינדוקציה): $A=\{a\}$, ואז A חסומה גם מלעיל וגם מלרע ע"י a עצמה, וכן $\max A=\min A=a$.

הנחת האינדוקציה: כל קבוצה בת n איברים חסומה ויש לה מקסימום ומינימום.

צ"ל: כל קבוצה בת $n+1$ איברים חסומה ויש לה מקסימום ומינימום.

צעד: תהי $A\in\mathbb{R}$ קבוצה בת $n+1$ איברים

נסמן: $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{n+1}\}$

נגדיר: $A'=A\setminus\{a_{n+1}\}=\{a_1,\dots,a_n\}$

חיסור מתוך A.

לפי הנחת האינדוקציה A' חסומה ויש לה מקסימום.
נסמן $\max A'=M'$

נגדיר M כאיבר הגדול מבין M' ו- a_{n+1}

$(M=\max\{M',a_{n+1}\})$

M חסם מלעיל של A: לכל איבר $a\in A$ מתקיים $a\in A'$ או $a=a_{n+1}$.
אם $a\in A'$, אזי $a\le M'$ אזי $a\le M'\le M$ (כי M' חסם מלעיל של A'). כלומר $a\le M$.
אם $a=a_{n+1}$, אזי $a\le M$ (כי $M\ge a_{n+1}$).
בסה"כ תמיד $a\le M$, ולכן M חסם מלעיל של A.

M חסם ~~התחתון~~ עליון של A:
יהי $K<M$, אזי $K<\max\{M',a_{n+1}\}$, כלומר $K<M'$ או $K<a_{n+1}$
אם $K<M'$, אזי קיים $a\in A'$ כך ש- $a>K$.
כיוון ש- $A'\subseteq A$, יש ב-A איבר גדול מ-K - ולכן K אינו חסם מלעיל של A.
אם $K<a_{n+1}$ אזי יש ב-A איבר שהוא גדול מ-K (a_{n+1}), ולכן K אינו חסם מלעיל של A.

בסה"כ כל מס' קטן מ-M אינו חסם מלעיל של A ולכן M הוא $\Leftarrow$ $M=\sup A$

M המקסימום של A:
$M=\max\{M',a_{n+1}\}$, לכן $M=M'$ או $M=a_{n+1}$
אם $M=M'$, אזי ~~מ~~ מכיוון ש- $M'=\max A'$, הרי $M'\in A'$.
כלומר ~~$M=M'$~~ $M=M'\in A'\in A$ לכן $M\in A$
אם $M=a_{n+1}$, אזי מכיוון ש- $a_{n+1}\in A$, הרי $M\in A$
בסה"כ קיבלנו $M=\sup A\in A$ ולכן $M=\max A$.

(* אותו הדבר שקול לחסם מלרע רק להפך! הכל אנלוגי.)

מס״פ

עיגול כלפי מעלה → $\lceil$מספר$\rceil$

עיגול כלפי מטה → $\lfloor$מספר$\rfloor$

(2) $A = \mathbb{Q}$

A איננה חסומה מלעיל

נניח כי A כן חסומה מלעיל, ו-M חסם מלעיל שלה.
נגדיר $a = \lceil M \rceil + 1$
a שלם ולכן $a \in A$
כמו כן, $a > M$
כלומר יש בקבוצה A איבר גדול מ-M - סתירה לכך ש-M חסם מלעיל, לכן A לא חסומה מלעיל.
בקבוצה - A לא חסומה מלרע.

(3) $A = \mathbb{N}$

A איננה חסומה מלעיל - כמו בדוגמה (2).

A חסומה מלרע - כל איברי A חיוביים, לכן כל $M \le 0$ חסם מלרע של A.

נראה כי $\inf A = 1$:
לכל $a \in A$, a מס׳ טבעי, ולכן $1 \le a$, כלומר 1 חסם מלרע של a.
לכל מס׳ $m > 1$, קיים ב-A איבר קטן מ-m (1), לכן m כזה אינו חסם מלרע של A.
כלומר 1 חסם מלרע גדול ביותר (חסם תחתון) של A.
$1 \in A$, לכן $\min A = 1$.

(4) $A = \mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} \mid a < 0\}$

A לא חסומה מלרע - לכל $m \in \mathbb{R}$, נגדיר $a = -|m| - 7$
אזי $a < 0$ ולכן $a \in A$, וכמו כן $a < m$, לכן יש בקבוצה a איבר קטן מ-m ולכן m אינו חסם מלרע של הקבוצה A.

לכל $M \ge 0$, מתקיים שכל איבר ב-A קטן מ-M, לכן M כזה חסם מלעיל של A, כלומר A חסומה מלעיל.

נראה כי $\sup A = 0$:
ראינו כי 0 חסם מלעיל של A.
יהי $m < 0$ אזי נגדיר $a = \frac{m}{2}$, נראה כי $a < 0$, לכן $a \in A$.
כמו כן $a > m$, ~~כלומר~~ יש ב-A מס׳ גדול מ-m, ולכן m אינו חסם מלעיל של A.
לכן 0 חסם מלעיל קטן ביותר של A (חסם עליון של A $\sup A$).
$0 \notin A$, ולכן אין לקבוצה A מקסימום.

נוסף

⑤ $$A \{ \tfrac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N} \}$$

נראה כי לכל $a\in A$, $0<a\leq 1$
לכן A חסומה (= גם מלעיל וגם מלרע).

נראה כי $\sup A = 1$:
1 חסם מלעיל של A, כפי שראינו קודם.
לכל ~~M~~$M<1$, ~~קיים~~ יש ב-A איבר גדול מ-M (1), ולכן
M אינו חסם מלעיל של A.
1 חסם עליון של A.
$1\in A$, ולכן $\max A = 1$

נראה כי $\inf A = 0$.
0 חסם מלרע של A, כפי שראינו קודם.
~~יהי~~ לכל ~~[illegible]~~ $0<m$, נגדיר

$$n_m = \left\lceil \frac{1}{m} \right\rceil + 1$$

ו- $$a = \frac{1}{n_m}$$

8 סכנה הייתה קרובה.

אזי $a\in A$ (כי a מצורת $\frac{1}{n_m}$, $n_m\in\mathbb{N}$).
כמו-כן, $a<m$ (כי $\frac{1}{a}>\frac{1}{m}$, $n_m =$, לפי ההגדרה).
לכן m אינו חסם מלרע של A.
טוענו 0 חסם מלרע גדול ביותר - כלומר חסם תחתון של הקבוצה A.

$0\notin A$ לכן אין ל-A מינימום.

⑥ $$A = \{(-1)^n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

נראה כי $A = \{1,-1\}$, לכן A חסומה.

$$\begin{cases} \min A = -1 \\ \max A = 1 \end{cases}$$

⑦ $$A = \{n_1\cdot n_2 \mid n_1, n_2\in\mathbb{N}\}$$

נראה כי $A = \mathbb{N}$

כל מכפלה של שני מספרים טבעיים הוא מס' טבעי
כל מס' טבעי ניתן להציג כמכפלה של 2 טבעיים -
הוא עצמו ו-1.
לכן: זה כמו בדוגמה 3.

⑧ $$A = \{ x \mid -4 < x \leq 1 \}$$

לכל $x\in A$ $-4 \leq x \leq 1$, לכן A וגם חסומה.

$\sup A = 1$,
לכל M קטן מ-1 קיים x שייך ל-A כך ש $M<x$ (למשל 1 עצמו) לכן
אין ל-A חסם מלעיל קטן מ-1
$1\in A$, ולכן $\max A = 1$

$\inf A = -4$
לכל $M>-4$ נגדיר $x = \frac{m+(-4)}{2}$, אזי,
$x\in A$ ו- $x<m$, לכן אין לקבוצה A חסם מלרע גדול
מ- (-4).
$(-4)\notin A$ לכן אין ל-A מינימום.

2.12.16 בס"ד

<u>תרגול</u> - סדרות

תבנית כללית המייצגת את הסדרה

$a_n = 2n-3$
$a_1=-1$
$a_2=1$
$a_3=3$
$a_4=5$
$-1, 1, 3, 5, \dots$

סדרה - קבוצה של איברים
כל כללי הקבוצות חלים על סדרות (חסומה, מונוטונית ...)

מונוטונית == מגמה קבועה
הסדרה a_n נקראת מונוטונית עולה אם לכל $n\in \mathbb{N}$ $a_{n+1}\ge a_n$
הסדרה נקראת מונוטונית יורדת אם לכל $n\in \mathbb{N}$ $a_{n+1}\le a_n$

1. הסדרה $a_n=4$ - סדרה קבועה
האם חסומה?
לכל $M\ge 4$ מתקיים לכל $n\in \mathbb{N}$ $a_n\le M$ - לכן הסדרה חסומה מלעל.
בדומה חסומה מלרע. לכן חסומה.
האם מונוטונית?
$a_n\le a_{n+1} \iff 4\le 4$
זה נכון לכל $n\in \mathbb{N}$ - מונוטונית עולה (גם מונוטונית יורדת).

2. הסדרה $a_n=2^n$
האם חסומה?
עבור $M\in \mathbb{R}$, נבחר $n=\lceil |M| \rceil+1$ אזי $n>M$ ולכן גם $2^n>M$, לכן M אינו חסם מלעל של הסדרה. זה נכון לכל $M\in \mathbb{R}$, לכן אין לסדרה חסם מלעל - לא חסומה.
האם מונוטונית?
$a_n\le a_{n+1} \iff 2^n\le 2^{n+1} \;/:2^n$
$1\le 2$ זה מתקיים לכל n טבעי
לכן הסדרה שלנו היא מונוטונית עולה.

3. $a_n=(-2)^n$ $\qquad -2, 4,$
האם חסומה?
עבור $M\in \mathbb{R}$ נבחר $n=2\cdot(\lceil |M| \rceil+1)$ אזי n זוגי וגם $n>M$
ולכן $a_n>M$ - כלומר M הוא לא חסם מלעל של הסדרה.
זה נכון לכל $M\in \mathbb{R}$ ולכן הסדרה לא חסומה.
האם מונוטונית?
$a_n\le a_{n+1} \iff (-2)^n\le(-2)^{n+1}$
זה לא מתקיים ל-n זוגי
$a_n\ge a_{n+1} \iff (-2)^n\ge(-2)^{n+1}$
זה לא מתקיים ל-n אי-זוגי
<u>לא מונוטונית</u>

נוסף

4. $a_n=(-1)^n$

האם חסומה?

לכל $n\in N$ זוגי $a_n=1$, לכל $n\in N$ אי זוגי $a_n=-1$, לכן בסדרה רק שני ערכים, 1 ו-(-1) ולכן זו קבוצת ערכים סופית, כלומר חסומה.

האם מונוטונית?

לא מונוטונית כמו בדוגמה הקודמת.

2. $a_n=\frac{n^2}{2n+3}$

$a_1=\frac{1}{5}$ $a_2=\frac{4}{11}$ $a_{100}=\frac{100^2}{203}=49$ $a_{4000}=\frac{4000^2}{8003}=2000$

$a_{10,000}=4,999$

האם חסומה?

עבור $M\in R$

$$a_n>M$$

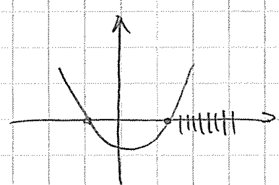
$$\frac{n^2}{2n+3}>M$$

$$n^2>2Mn+3M$$
$$n^2-2Mn-3M>0$$

נבדוק

$$n^2-2Mn-3M=0$$
$$n_{1,2}=\frac{2M\pm\sqrt{4M^2+12M}}{2}=$$
$$M\pm\sqrt{M^2+3M}$$

עבור $M>0$ יש שני פתרונות לשוויון, ולכן



לכל קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ ומתקיים שהפרבולה חיובית, כלומר מתקיים אי השוויון המקורי.

כלומר אין לסדרה חסם מלעיל - <u>לא חסומה</u>.

האם מונוטונית?

$$\frac{n^2}{2n+3}\le\frac{(n+1)^2}{2(n+1)+3} \Leftrightarrow a_n\le a_{n+1}$$

$$\frac{n^2}{2n+3}\le\frac{n^2+2n+1}{2n+5}$$

$n^2(2n+5)\le(2n+3)(n^2+2n+1)$
$\cancel{2n^3}+5n^2\le \cancel{2n^3}+4n^2+2n+3n^2+6n+3$
$0\le 2n^2+8n+3$

זה מתקיים לכל n.
הסדרה מונוטונית עולה.

6. $a_n=\frac{1}{n}$

האם חסומה?

לכל $n\in\mathbb{N}$ $0\le\frac{1}{n}\le 1$

לכן חסומה.

מונוטונית?

$a_n\ge a_{n+1}$ $\frac{1}{n}\ge\frac{1}{n+1}$

$n\le n+1$

$0\le 1$

זה מתקיים לכל n, לכן הסדרה מונוטונית יורדת.

<u>גבול</u>

n_0 זה רק א

תהי a_n סדרה, L מס׳ ממשי. a_n נקראת מתכנסת לגבול L, אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=L$$

$$a_n\xrightarrow{n\to\infty}L$$

7. $a_n=\frac{1}{n}$

נוכיח כי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

יהי $\varepsilon>0$, אזי, צריך להתקיים $|a_n-0|<\varepsilon$

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}<\varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon}<n$$

נבחר $n_0=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil+1$

אזי לכל $n\ge n_0$ מתקיים אי-השוויון הנדרש ולכן הגבול הוא 0.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

נוסף

8. $a_n = 8 + \frac{1}{n^2}$

נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$

יהי $\varepsilon > 0$, אזי צריך שיתקיים

$$|a_n - 8| < \varepsilon$$

$$\left|8 + \frac{1}{n^2} - 8\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

$$n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

נבחר $n_0 = \sqrt{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil} + 1$

אזי לכל $n \ge n_0$
מתקיים אי השוויון הנדרש.
לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$

9. $a_n = \frac{3n-2}{4n+7}$

נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} = \frac{3}{4}$

יהי $\varepsilon > 0$, אזי צריך להתקיים $\left|a_n - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{3n-2}{4n+7} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{12n - 8 - (12n + 21)}{4(4n+7)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-29}{16n+28}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{29}{16n+28} < \varepsilon$$

$$29 < 16n\varepsilon + 28\varepsilon$$

$$16n\varepsilon > 29 - 28\varepsilon$$

$$n > \frac{29 - 28\varepsilon}{16\varepsilon}$$

נבחר n_0 $n_0 = \left\lceil \frac{29 - 28\varepsilon}{16\varepsilon} \right\rceil + 1$

כל $n \ge n_0$ מתקיים אי השוויון הדרוש לכן:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$$

נוסף

10) $a_n=\left(\frac{\sin n}{3}\right)^n$

נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

יהי $\varepsilon>0$ אנו צריך להתקיים $|a_n-0|<\varepsilon$

$$\left|\left(\frac{\sin n}{3}\right)^n-0\right|<\varepsilon$$

$$\left|\left(\frac{\sin n}{3}\right)^n\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\sin n}{3}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{|\sin n|^n}{3^n}<\varepsilon$$

מאחר ומתקיים $0\le|\sin n|^n\le 1$

לכן מספיק למצוא מתי מתקיים:

$$\frac{1}{3^n}<\varepsilon$$

$\boxed{\log}$ להגדיר.

- [illegible]

$$\frac{1}{\varepsilon}<3^n$$

$$\log_3\frac{1}{\varepsilon}<n$$

נבחר $n_0=\lceil\log_3\frac{1}{\varepsilon}\rceil+1$

אזי לכל $n\ge n_0$ מתקיים אי השוויון הדרוש.

ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

המשך

11) $a_n=(-1)^n$

נוכיח כי הגבול הוא לא 1

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 1$$

עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$, נניח שקיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים

$$|a_n-1|<\frac{1}{2}$$

אבל אם ניקח $n=2\cdot n_0+1$ אזי $n\geq n_0$ אבל n אי-זוגי, לכן

$a_n=-1$, לכן:

$$|-1-1|<\frac{1}{2}$$

$$2<\frac{1}{2}$$

וזו סתירה.

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 1$

בצורה דומה, גם לא -1.

הגדרת סדרה רקורסיבית - קביעת איבר בסיס ואז קביעת חוק של האיברים הבאים.

$$a_n=\begin{cases} 6 & n=1 \\ 2a_{n-1}+1 & n>1 \end{cases}$$

כך מוגדרת סדרה רקורסיבית.

$a_1=6$

$a_2=2\cdot 6+1=13$

$a_3=2\cdot 13+1=27$

$\vdots$

פיבונאצ'י:

$$F_n=\begin{cases} 1 & n=1 \text{ או } n=2 \\ F_{n-1}+F_{n-2} & n>2 \end{cases}$$

$1, 1, 2, 3, 5, 8 \ldots$

9.12.16 בס״ד

תרגול

תהי a_n סדרה. הסדרה נקראת שואפת לאינסוף/למינוס אינסוף, אם לכל מספר $M\in\mathbb{R}$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$, מתקיים $a_n>M$ / $M>a_n$

אם סדרה שואפת לאינסוף / מינוס אינסוף אינה חסומה.

$a_n=(-1)^n\cdot n$ ← לא חסומה, לא שואפת לאינסוף ולא למינוס אינסוף ולכן לא נכון לומר שסדרה שאינה חסומה שואפת לאינסוף / למינוס אינסוף.

סדרה לא חסומה אינה בהכרח שואפת לאינסוף / למינוס אינסוף.

<u>אריתמטיקה של גבולות:</u>

a_n,b_n סדרות מתכנסות $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L_1$ $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=L_2$ $(L_1,L_2\in\mathbb{R})$.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+B_n)=L_1+L_2$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-B_n)=L_1-L_2$$

$$\lim(a_n\cdot B_n)=L_1\cdot L_2$$

$$\lim(a_n/B_n)=L_1/L_2\quad(b_n\neq0\ \text{ לכל }n\in\mathbb{N}\text{ וגם }L_2\neq0)$$

$$\lim\left(a_n^{B_n}\right)=L_1^{L_2}\quad(L_1>0)$$

דוגמאות:

1. $$a_n=6+\frac{2}{n^2}-\frac{7}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=6+0-0=6$$

2. $$a_n=\frac{3n-2}{4n+7}=\frac{\overset{\to3}{3}-\overset{\to0}{\frac{2}{n}}}{\underset{\to4}{4}+\underset{\to0}{\frac{7}{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3-0}{4+0}=\frac{3}{4}$$

הערה חשובה!
אם המס' במונה גדול מהמס' במכנה זה ישאף או ל-∞ או ל-$-\infty$
אם המס' במכנה גדול מהמונה ישאף ל-0
אם שניהם שווים, המקדם המוביל מעל המקדם המוביל במכנה!

3. $$a_n=\frac{5n^3-2n^2+1}{7n^3+n^2+\frac{n}{2}+2}=\frac{\overset{\to5}{5}-\overset{\to0}{\frac{2}{n}}+\overset{\to0}{\frac{1}{n^3}}}{\underset{\to7}{7}+\underset{\to0}{\frac{1}{n}}+\underset{\to0}{\frac{1}{2n^2}}+\underset{\to0}{\frac{2}{n^3}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{7}$$

פתרון

4. $a_n = \dfrac{-\frac{1}{3}n+6}{4n^2+2n-1} = \dfrac{-\frac{1}{3n}+\frac{6}{n^2}}{4+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{0}{4} = 0$

a_n, b_n סדרות:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1 \quad , \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$

$L_1 \in R \qquad\qquad L_2 = \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n-b_n) = -\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty & L_1>0 \\ -\infty & L_1<0 \\ \text{לא מוגדר} & L_1=0 \end{cases}$

3 דוגמאות למקרה לא מוגדר:

$b_n = n^2 \qquad a_n = \frac{1}{n}$

$a_n \to 0 \qquad b_n \to \infty$

$(a_n \cdot b_n) \to \infty$

$b_n = n \qquad a_n = \frac{1}{n^2}$

$a_n \to 0 \quad , \quad b_n \to \infty$

$(a_n \cdot b_n) \to 0$

$b_n = n \qquad a_n = \frac{1}{n}$

$a_n \to 0 \quad , \quad b_n \to \infty$

$(a_n \cdot b_n) \to 1$

סוג

$L_1 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ $L_2 = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$ (לכל $n\in N$, $b_n \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{a_n} = \begin{cases} 0 & L_1<0 \\ \text{לא מוגדר} & L_1=0 \\ \infty & L_1>0 \end{cases}$$

[illegible]

$\lim\limits_{n\to\infty} B_n = L_2$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$

$$L_1 - L_2 = \infty$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) =$ לא מוגדר.

5) $$a_n = \frac{3n^2-4}{1\frac{1}{2}n+8} = \frac{3n-\frac{4}{n}}{1\frac{1}{2}+\frac{8}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\infty-0}{1\frac{1}{2}+0} = \infty$$

6) $$a_n = \frac{5n^3-4n^2+2n+7}{3n^2+8n+12} = \frac{5n-4+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{3+\frac{8}{n}+\frac{12}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\infty-4+0+0}{3+0+0} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

משפט הסנדוויץ':

a_n, b_n, c_n סדרות, כך שקיים $n_0\in N$ כך ש- $n>n_0$

מתקיים: $a_n \le b_n \le c_n$

אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

אז $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = L$

המשך

$$a_n = \frac{\sin n}{n^2}$$

$$-1 \le \sin n \le 1$$

$$\underset{\to 0}{-\frac{1}{n^2}} \le \frac{\sin n}{n^2} \le \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}$$

לכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

משפט: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

8. $a_n = \sqrt[n]{8}$

לכל $n \in \mathbb{N}$: $(8 > 1^n = 1) \xRightarrow{\text{מונוטוניות}} \sqrt[n]{8} > 1$

לכל $n \ge 8$: $\sqrt[n]{n} \ge \sqrt[n]{8}$

לכל $n \ge 8$ מתקיים

$$\underset{1\leftarrow}{1} \le a_n \le \underset{\to 1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

9. $a_n = \sqrt[n]{9^n + 8^n}$

$$9 = \sqrt[n]{9^n} < \sqrt[n]{9^n + 8^n} < \sqrt[n]{9^n + 9^n} \overset{\text{[illegible] כי}}{=} \sqrt[n]{2 \cdot 9^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 9$$

$$\underset{9\leftarrow}{9} < a_n < \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\text{הולך ל-1}} \cdot 9 \to 9$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 9$$

בס"ד

10) $$a_n = \sqrt[n]{(1.1)^n + (1.2)^n + (1.3)^n}$$

לפי ס

$$1.3 = \sqrt[n]{(1.3)^n} < \sqrt[n]{(1.1)^n + (1.2)^n + (1.3)^n} < \sqrt[n]{3 \cdot (1.3)^n} = \underset{\to 1}{\sqrt[n]{3}} \cdot \underset{\to 1.3}{(1.3)}$$

$$1.3 < a_n < 1.3$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.3$$

11) $$a_n = 9^n - 8^n$$

$a_n =$ מספר^n − מספר^n

יותר גדול → מנצח

← הפרש מגיע לאינסוף.

בינום של ניוטון:

$$(a+b)^n = a^n \cdot \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{1} a \cdot b^{n-1} + b^n$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$9^n = (8+1)^n = 8^n + n \cdot 8^{n-1} \cdot 1 + \dots$$

לכן

$$9^n - 8^n = n \cdot 8^{n-1} + \dots$$

ולכן

$$9^n - 8^n > n \cdot 8^{n-1}$$

$$\underset{\to\infty}{n \cdot 8^{n-1}} < 9^n - 8^n < \underset{\to\infty}{9^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

ס ם .

[illegible]

12) $a_n = \sqrt{n^2+7} - n$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$ עוד נוסחה!

הכפל- בצמוד.

$$\sqrt{n^2+7} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2+7}+n}{\sqrt{n^2+7}+n} =$$

$$\frac{n^2+7-n^2}{\sqrt{n^2+7}+n} = \frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n \to \infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{7}{\infty} = 0$$

נכנס כמו n^2 לתוך שורש

נכנס כמו n^2 לתוך השורש

13) $a_n = n\left(\sqrt{n+2+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right) =$

$$a_n = \sqrt{n^3+2n^2+n} - \sqrt{n^3} =$$

$$a_n = \sqrt{n^3+2n^2+n} - \sqrt{n^3} \cdot \frac{\sqrt{n^3+2n^2+n}+\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+2n^2+n}+\sqrt{n^3}} =$$

$$\frac{\cancel{n^3}+2n^2+n-\cancel{n^3}}{\sqrt{n^3+2n^2+n}+\sqrt{n^3}} = \frac{2n^2+n}{\sqrt{n^3+2n^2+n}+\sqrt{n^3}} \Leftarrow$$ נחלק ב $n^{1\frac{1}{2}}$

$$n^{1\frac{1}{2}} = n^1 \cdot n^{\frac{1}{2}} = n\sqrt{n}$$

לפי הסדר הגבוה, $n^{1\frac{1}{2}}$ נכנס כמו n^3.

$$\frac{2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\infty+0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

14) $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

קטן מ-1 קטן מ-1

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \underbrace{3 \cdot \ldots}_{\text{שווים 1 במקומות לכן}} \cdot n} < 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

יותר גדול

הסדרה חסומה מלרע $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\} > 0$

$$0 \leftarrow 0 \le \frac{2^n}{n!} \le \frac{4}{n} \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

שלווי בוק

מסק'

2.1.

$$\frac{2n}{n^3-1} < \varepsilon$$

משוואה ממעלה 3 -
כריך - אי שוויונים -

נוסח

$$\frac{n^3}{2} < n^3-1$$

כלומר קיים K כך ש-

עכים $n > K \qquad n^3-1 > \frac{n^3}{2}$

$$n^3 - \frac{n^3}{2} > 1$$

$$\frac{n^3}{2} > 1$$

$$n^3 > 2$$

$$n > 1$$

נקבל

$$\frac{2n}{n^3-1} < \frac{2n}{\frac{n^3}{2}} < \varepsilon$$

דרישה יותר חזקה.

$$\frac{2n}{\frac{n^3}{2}} = \frac{4n}{n^3} = \frac{4}{n^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2n}{n^3-1} < \frac{4}{n^2} < \varepsilon$$

$$\frac{4}{\varepsilon} < n^2$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{4}{\varepsilon}} < n}$$

מ.ש.ל.

16.12.16 מסקנה

תרגול:

תרגיל:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad , \quad a_n=\frac{2n}{n^3-1}$$

א. אריתמטיקה גבולות

$$a_n=\frac{2^{\to 2}}{\underset{\infty\leftarrow}{n^2}-\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{\infty-0}=\frac{2}{\infty}=0$$

ב. סנדוויץ'

אם נגדיל מונה או נקטין מכנה, השבר הולך וגדל

$$0\le\frac{2n}{n^3-1}\le\frac{2n}{n^2-1}=\frac{2n}{(n-1)(n+1)}=$$

כל המספרים חיוביים

$$\frac{2}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\le\frac{2}{n-1}\cdot 1=\frac{2}{n-1}\to 0$$

$$0\le\frac{2n}{n^3-1}\le 0$$

לפי סנדוויץ':

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

ג. לפי הגדרה:

יהי $\varepsilon>0$, צ"ל $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים

$$|a_n-0|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2n}{n^3-1}-0\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2n}{n^3-1}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{2n}{n^3-1}<\varepsilon$$

נשים לב כי:

$$\frac{2n}{n^3-1}\le\frac{2n}{n^2-1}=\frac{2n}{(n-1)(n+1)}=\frac{2}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\le\frac{2}{n-1}$$

לכן צ"ל שמתקיים:

$$\frac{2}{n-1}<\varepsilon$$

$$2<(n-1)\varepsilon=\varepsilon n-\varepsilon$$

$$2+\varepsilon<n\varepsilon$$

$$\frac{2}{\varepsilon}+1=\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}<n$$

עבור $n_0=\left\lceil\frac{2}{\varepsilon}\right\rceil+2$, זה מתקיים.

לכן: $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

מוסף

ב.

ε סיגמה מייצגת סכום

$$a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot\cos^2(n-i)}{n^3}$$

$$\frac{1\cdot\cos^2(n-1)}{n^3}+\frac{2\cdot\cos^2(n-2)}{n^3}+\dots+\frac{n\cdot\cos^2 0}{n^3}$$

נראה כי $\quad -1\le\cos(n-i)\le 1$

ולכן $\quad 0\le\cos^2(n-i)\le 1$

* להזכיר את הנוסחה. סכום סדרה חשבונית

כל האיברים יהיו גדולים מ-0

$$0\le\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cos^2(n-i)}{n^3}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot 1}{n^3}=$$

כל דבר שלא תלוי במשתנה ואפשר להוציא החוצה.

$$\frac{1}{n^3}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\text{נוסחה לסכום סדרה חשבונית}}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n^2}\to 0$$

לכן לפי סנדוויץ':

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

3.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1$$

נראה כי:

$$\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}=$$

$$\frac{1+\frac{k}{n^2}-1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}=\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}=\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)}$$

לכן:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)}$$

נחסום מלמעלה:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1}+1}=$$

מקטינים את
להקטין מכנה

$$\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{4n}=\frac{1}{4}$$

אותה חזקה, לוקחים את המקדם
במונה חלקי המקדם במכנה.

נחסום מלמטה:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}\ge\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1}=$$

נגדיל את המכנה

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\sum_{k=1}^{n}k=$$

$$\frac{1}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=$$

נחלק מונה
ומכנה ב-n

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\longrightarrow\frac{1+0}{2\left(\sqrt{1+0}+1\right)}=\frac{1}{4}$$

לפי סנדוויץ':

$$\frac{1}{4}\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\le\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}$$

הסק

סכום סדרה חשבונית

$$\frac{a_n(n+1)d}{2}$$

סדרות אוילר

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

מספר אוילר. $e \cong 2.717\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} = e^{-}$$

$b_n = n+1$

- תהי b_n סדרה ששואפת לאינסוף

נגדיר $a_n = \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}$

אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = e$

- תהי b_n סדרה ששואפת לאינסוף

נגדיר $a_n = \left(1-\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}$

אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} = e^{-}$

.4 $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}} = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} \longrightarrow e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{e}$

.5 $a_n = \left(1-\frac{5}{n^2}\right)^{6n}$

$$a_n = \left(1-\frac{1}{\frac{n^2}{5}}\right)^{\frac{n^2}{5}\cdot\frac{5}{n^2}\cdot 6n} = \left[\left(1-\frac{1}{\frac{n^2}{5}}\right)^{\frac{n^2}{5}}\right]^{\frac{30}{n}\to 0} \longrightarrow$$

סדרה ששואפת לאינסוף

$$\left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

המשך

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$$ .6

נחפש סדרה b_n כך שיתקיים:

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{b_n}$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{b_n}$$

$$\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{b_n}$$

$$\frac{n^2}{n+1}=b_n$$

$$a_n=\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n^2}\cdot n}=$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{n\cdot\frac{n+1}{n^2}\to 1}\longrightarrow$$

$$e^1=e$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e$$

$$a_n=\left(\frac{1-2n^2}{3-2n^2}\right)^{2n^2-1}$$ .7

נחפש סדרה b_n כך שמתקיים

כשרואים כש-1 שואף לאינסוף
כששואפים לאינסוף, משתמשים ב-e.

אם לא בטוחים, עדיף לעשות +.

$$\frac{1-2n^2}{3-2n^2}=1+\frac{1}{b_n}$$

מ״מ $$\Big/\ \frac{1-2n^2}{3-2n^2}-1=\frac{1}{b_n}$$

$$\frac{1-\cancel{2n^2}-3+\cancel{2n^2}}{3-2n^2}=\frac{1}{b_n}$$

$$\frac{2}{2n^2-3}=\frac{-2}{3-2n^2}=\frac{1}{b_n}$$

$$n^2-1\tfrac{1}{2}=\frac{2n^2-3}{2}=b_n$$

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n^2-1\frac{1}{2}}\right)^{n^2-1\frac{1}{2}\cdot\frac{2n^2-1}{n^2-1\frac{1}{2}}}=\left[\left(1+\frac{1}{n^2-1\frac{1}{2}}\right)^{n^2-1\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2n^2-1}{n^2-1\frac{1}{2}}\to 2}\longrightarrow$$

$$e^2$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e^2 \qquad \text{גם}$$

סעי' 8.

מסוג 1^∞

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^{\frac{\sqrt[3]{n^2} - 2\sqrt[3]{n^5} + 3\sqrt[3]{n^8}}{\sqrt{1-4n^2+5n^4}}}$$

$$a = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^{\sqrt[3]{n^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{n^2} - 2\sqrt[3]{n^5} + 3\sqrt[3]{n^8}}{\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt{1-4n^2+5n^4}\right)}}$$

נראה כי:

$$\frac{\sqrt[3]{n^2} - 2\sqrt[3]{n^5} + 3\sqrt[3]{n^8}}{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sqrt{1-4n^2+5n^4}} =$$

נצמצם ב- $\sqrt[3]{n^2}$

$$\frac{\sqrt[3]{n^5}}{\sqrt[3]{n^2}} = \sqrt[3]{n^3} = n$$

$$\frac{1 - 2n + 3n^2}{\sqrt{1-4n^2+5n^4}} =$$

נחלק ב- n^2

נכנס בתוך n^4

$$\frac{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} + 3}{\sqrt{\frac{1}{n^4} - \frac{4}{n^2} + 5}} \longrightarrow \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$a_n \longrightarrow {1/e}^{3/\sqrt{5}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{3/\sqrt{5}}$$

* מבחן המנה (מבחן דלמבר):

יהי a_n סדרת חיוביים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(L אפס או חיובי או ∞)

אם $L<1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

אם $L>1$ (או ∞) אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

אם $L=1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n$ צריך בדוק.

פס"ק

9.

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \,/\, (n+1)^{n+1}}{n! \,/\, n^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} \overset{\text{נצמצם}\ (n+1)}{=} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\overset{\to 1}{\frac{n}{n+1}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^1 = \frac{1}{e} < 1$$

לפי מבחן המנה

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

23-12-16 נסק״

לבדוק פירוק סימונים:

$\square \cdot \triangle =$ מכפלה $a \cdot c$

$\square + \triangle =$ מקדם b

גבולות של פונקציות:

1) $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 1\frac{1}{2}) = (-2)^2 - 1\frac{1}{2} = 4 - 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim\limits_{x \to 3}(x+3) = 6$

3) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)} = \frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{-3}{3} = -1$

$x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$
$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

4) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{6x^2-13x-5}{9x+3} = \frac{\cancel{(3x+1)}(2x-5)}{3\cancel{(3x+1)}} = \frac{2x-5}{3} = \frac{2\cdot(-\frac{1}{3})-5}{3} = -\frac{17}{9} = -1\frac{8}{9}$

$6x^2-13x-5 = (3x+1)(2x-5)$
$9x+3 = 3\cdot(3x+1)$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2-4x+7}{3x^3-5x^2+8} = \frac{\frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{3 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^3}} = \frac{0}{3} = 0$

6) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2\frac{1}{2}x^2-8}{1\frac{1}{4}x^2+2x-1} = \frac{2\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}} = 2$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) = \frac{\cancel{1-x}}{\cancel{(1-x)}(1+\sqrt{x})} =$

$\frac{1}{(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2}$

8) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} = \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}} =$

$\frac{(2x+1)-(x+5)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5})} = \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5})} =$

$\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$

משפט הסנדוויץ' לפונקציות:
עבור פונקציות f, g, h ! $x_0 \in R$
אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta$ מתקיים
$f(x) \le g(x) \le h(x)$
ואם הגבול של שני הצדדים שווה:
$L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$
אז $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$

מסק״

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ $\qquad -1 \le \sin x \le 1$

$$0 \leftarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x} \to 0$$

לכן :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

10) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2)$ $\qquad -1 \le \cos(\ln x^2) \le 1$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-x^2} \le x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^2}$$

$$0 \le x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \le 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) = 0$$

לשנן! 11) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{x} = \frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7 = 7 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} =$ $\qquad 7x = t$

$7 \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 7 \cdot 1 = 7$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 9x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x/4x}{\sin 9x/9x} \cdot \frac{4x}{9x}\right) =$

$\frac{4}{9} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{9x}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1} = \frac{4}{9}$

$tg = \frac{\sin}{\cos}$ $\quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ 20"N

14) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg(x) - \sin(x)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \sin(x)}{x^3} =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin x \cdot \cos x}{\cos x \cdot x^3} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2 \cdot \cos x} =$$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cdot \cos x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cdot \cos x} =$$

$$\underbrace{\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}\right)}_{1} \left(\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}\right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 x}}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 x}}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 x}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 x}} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 + \sin^2 x}{x^2 (1 + \sqrt{1 - \sin^2 x})} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \sqrt{1 - \sin^2 x})} =$$

$$\underbrace{\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - \sin^2 x})}\right) = \frac{1}{2}$$

בס"ד

כלל החלפת פונקציה

נתון פונק' f, g, h ומספר/ אינסוף x_0
אם

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \text{אז}$$

$$\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = \lim_{x\to 0} h(g(x))$$

13) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 9x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1 \\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{9x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{4x}{9x} = \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \\ \lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e} \end{array}}$$

14) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x} =$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 6} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^6 = \lim_{x\to\infty} e^6$$

סמ"ס

15) $$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin(x^2)\right)^{\frac{4}{x^2}} = \qquad \frac{\sin(x^2)}{x^2}=1$$

לפי כלל החלפת הפונקציה

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x^2}}\right)^{\frac{1}{x^2}\cdot 4} = \qquad t=\frac{1}{x^2}\to\infty$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{4} = e^{4}$$

צריך לזכור!

16) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

17) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{4x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)-(e^{2x}-1)}{4x}=$$

לפי כלל החלפת הפונקציה ושימוש בגבול 16

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-2x}{4x}=\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$$

18) $$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x^2-4}-1}{5x-10}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x^2-4}-1}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-4}{5x-10}=$$

$$t=x^2-4\xrightarrow[x\to 2]{}0 \qquad \left(\lim_{x\to 2}\frac{e^{x^2-4}-1}{x^2-4}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{5x-10}\right)$$

$$\underbrace{\left(\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}\right)}_{1}\cdot\left(\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{5\cancel{(x-2)}}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{5}=\frac{4}{5}$$

תרגול

פונקציה נורמלית - בכל מקום אפשר להציב ולמצוא את ה-y.
רציפות - עבור f פונקציה, $x_0 \in R$ - f רציפה ב-x_0 אם $f(x_0)$, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיימים ושווים זה לזה.

לדוגמה:

$$\lim_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

(כמו הפונק' x+2 פרט ל x=2 שיהיה בה חור)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = x+2 = 4$$

בנק' x=2 הפונקציה לא רציפה.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

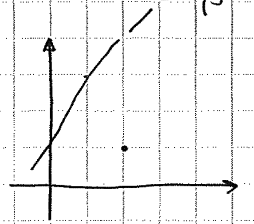
הפונק' רציפה בנק' x=2
(כמו הפונק' x+2)

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$
$$f(2) = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$$

f לא רציפה בנק' 2:

גרף:

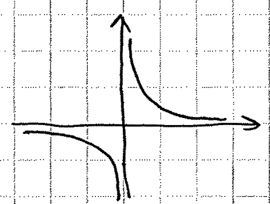


$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

$$f(2) = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \begin{cases} \xrightarrow{x>0} \infty \\ \xrightarrow{x<0} -\infty \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

* עבור פונק' f, $L, x_0 \in R$, הגבול מימין של f בנק' x_0 הוא L, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $x-x_0<\delta$ $(x>x_0)$ אז $|f(x)-L|<\varepsilon$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$ ← גבול מימין

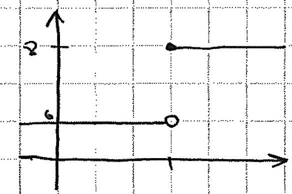
בצורה דומה מוגדר גבול משמאל:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$ גבול משמאל

רציפות

הגבול של f בנק' x_0 הוא L אם ורק אם ל-f יש שני גבולות חד צדדיים בנק' x_0 ושניהם שווים ל-L

$$f(x)=\begin{cases} 8 & x\geq 3 \\ 6 & x<3 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=8$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=6$$

בנק' $x=3$ אין לפונק' גבול (כי שני הגבולות החד-צדדיים שונים), ולכן היא לא רציפה בנק' זו.

<u>סוגי אי-רציפות-</u>

עבור f פונק', $x\in R$ -

א) ל-f יש ב-x_0 <u>אי-רציפות סליקה</u>, אם הגבול של f בנק' x_0 קיים אבל שונה מ-$f(x_0)$.

ב) ל-f יש ב-x_0 <u>אי-רציפות מסוג ראשון (I)</u>, אם, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ קיימים, סופיים ושונים זה מזה.

ג) ל-f יש ב-x_0 <u>אי רציפות מסוג שני (II)</u> אם לפחות אחד מבין $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ אינסופי (או לא קיים).

1) $$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$$

הפונק' רציפה לכל $x\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$f(0)=2$

ב-$x=0$ יש לפונק' אי-רציפות סליקה.

$\lim_{x\to 0} = 1 \neq f(0)=2$

2) $$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

הפונק' רציפה לכל $x\neq 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)=1$

$f(x)=1$

לכן גם ב-$x=0$ הפונק' רציפה

f רציפה בכל נקודה

בס״ד

3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ הפונק' רציפה לכל $x \neq 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = (x+2) = 4$$

$f(2)$ לא מוגדר

לכן ב- $x=2$ יש לפונק' אי רציפות סליקה.

4) $f(x) = \begin{cases} 8 & x \geq 3 \\ 6 & x < 3 \end{cases}$ הפונקציה רציפה לכל $x \neq 3$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 8$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 6$$

שני גבולות חד-צדדיים, קיימים, סופיים ושונים זה מזה.

לכן ב- $x=3$ יש לפונק' אי רציפות מסוג I

5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ לכל $x \neq 0$ הפונק' רציפה.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$ (מספיק גבול אחד אינסופי, לא חייבים לבדוק את הגבול השני)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

יש לפחות גבול חד-צדדי אחד שהוא אינסופי, לכן ב- $x=0$ יש לפונק' אי רציפות מסוג II

6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & x > 2 \\ x^3-6 & x \leq 2 \end{cases}$ לכל $x \neq 2$ הפונק' רציפה

$$\lim_{x\to 2^+} x^3-6 = 2$$

הפונק' רציפה לכל x

$$\lim_{x\to 2^-} = \lim_{x\to 2^+} = f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-1} = 2$$

$$f(2) = x^3-6 = 2$$

לכן יש לפונק' גבול ב- $x=2$ ושווה 2

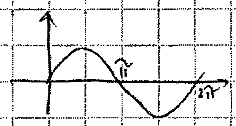
הפונק' רציפה גם ב- $x=2$.

הפונק' רציפה בכל נקודה.

ספ"ק

7) $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$

הפונק' רציפה כאשר
$\sin x \neq 0$
כלומר $\pi k \neq x$ כאשר k שלם



π רדיאנים = 180° מעלות

$$\lim_{\substack{x \to \pi k^+ \\ k \text{ זוגי}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \pi k \\ k \text{ זוגי}}} \frac{|\sin x|}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to \pi k^- \\ k \text{ זוגי}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \pi k \\ k \text{ זוגי}}} \frac{|\sin x|}{\sin x} = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to \pi k^+ \\ k \text{ אי זוגי}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \pi k^+ \\ k \text{ אי זוגי}}} \frac{|\sin x|}{\sin x} = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to \pi k^- \\ k \text{ אי זוגי}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \pi k^-}} \frac{|\sin x|}{\sin x} = 1$$

בכל נק' $x = \pi k$ הגבולות החד-צדדים קיימים, סופיים ושונים זה מזה,
לכן בכל נק' כזו יש לפונק' אי-רציפות מסוג 1

8) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} & x \neq 1, -1 \\ 2 & x = 1 \\ 0 & x = -1 \end{cases}$

$x^2+5x-x-5$ $\quad x(x+5)-(x+5)$
$(x+5)(x-1)$

תשובה של אורי!

הפונק' רציפה לכל $x \neq -1,\ x \neq 1$;

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$$

$$* \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+5)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+5}{x+1} = 3$$

$$f(1) = 2$$

בנק' $x = 1$ הגבול קיים ושונה מערך הפונק' לכן יש בנק' הזו
אי רציפות סליקה.

$$* \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{x+5}{x+1} = \frac{4}{0^+} = \infty$$

$$* \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) \quad \frac{x+5}{0^-} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

בנק' $x = -1$ אין לפונקציה שני גבולות חד-צדדים סופיים ולכן בנק' זו
יש אי-רציפות מסוג II

פתרון

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^{-\frac{1}{x}}-1}{2^{-\frac{1}{x}}+1} & x>0 \\ \dfrac{e^{5x}-1}{6x} & x<0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

$\boxed{x^{-\infty}=\frac{1}{x^{\infty}}=0}$

הפונק׳ רציפה לכל $x\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ \dfrac{2^{\overbrace{-\left(\frac{1}{x}\right)}^{\to -\infty}}-1}{2^{-\left(\frac{1}{x}\right)}+1}=\dfrac{2^{-\infty}-1}{2^{-\infty}+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=\dfrac{-1}{1}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{5x}-1}{6x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\overbrace{5x}^{\text{חשוב!}}}{6x}=\dfrac{5}{6}$

בנק׳ $x=0$ שני הגבולות החד-צדדיים קיימים, סופיים ושונים, לכן בנק׳ זו יש לפונקציה אי רציפות מסוג ראשון

תרגול נגזרות!

$f(x)$ פונקציה, $x_0 \in R$
הנגזרת של f בנק' x_0 מסומנת $f'(x_0)$ ->
מוגדרת

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta}$$

(אם הגבול קיים וסופי).

1. $f(x) = 3x^2+5 \qquad x_0 = 4$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta} =$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{3(4+\Delta)^2+5-(3\cdot 4^2+5)}{\Delta} =$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{3(16+8\Delta+\Delta^2)-3\cdot 16-5}{\Delta} =$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{48+24\Delta+3\Delta^2-48-5}{\Delta} =$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{24\Delta+3\Delta^2}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\cancel{\Delta}(24+3\Delta)}{\cancel{\Delta}} =$$

$$\lim_{\Delta \to 0} (24+3\Delta) = \lim_{\Delta \to 0} (24+3\cdot 0) = 24$$

באופן כללי:

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{3(x+\Delta)^2-3x^2}{\Delta} =$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\cancel{3x^2}+6x\Delta+3\Delta^2-\cancel{3x^2}}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\cancel{\Delta}(6x+3\Delta)}{\cancel{\Delta}} =$$

$$\lim_{\Delta \to 0} (6x+3\overset{\nearrow 0}{\Delta}) = 6x$$

המשך

כללים בסיסיים שקשורים עם נגזרת (כללי חישוב לנגזרות):

⊛ עבור 2 פונקציות f,g

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(f\cdot g)' = f'g + g'f$$

$$(f/g)' = \frac{f'\cdot g + g'f}{g^2}$$

2. $f(x) = c$ c קבוע

$f'(x) = 0$

3. $f(x) = x^n$

$f'(x) = n\cdot x^{n-1}$ נכון לכל n

עבור n שלם וחיובי מתקיים:

$$(x^n)' = \lim_{\Delta\to 0} \frac{(x+\Delta)^n - x^n}{\Delta} =$$

מקדם כלשהו

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{\cancel{x^n} + n x^{n-1}\Delta + O\Delta^2 + \dots + \Delta^n - \cancel{x^n}}{\Delta} =$$

קבוע כלשהו

$$\lim_{\Delta\to 0} \left(n x^{n-1} + O\Delta + O\Delta^2 + \dots + \Delta^{n-1}\right) =$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \left(n x^{n-1}\right)$$

4. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ לפי סעיף 3:

לפי הגדרה:

$$(\sqrt{x})' = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta} - \sqrt{x}}{\Delta} =$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta} - \sqrt{x}}{\Delta} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{\Delta} - \cancel{x}}{\cancel{\Delta}\left(\sqrt{x+\Delta} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[illegible]

קבוע

5. $(C \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

6. $(8x^5) = f(x)$

$f'(x) = 8 \cdot (x^5)' = 8 \cdot 5 \cdot x^4 = 40x^4$

7. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x - 12$

$f'(x) = (2x^3)' + (3x^2)' + (7x)' - (12)' =$

$2 \cdot (x^3)' + 3 \cdot (x^2)' + 7(x)' - (12)' = 6x^2 + 6x + 7$

8. $f(x) = \dfrac{6x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3}{2x+4}$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3)' \cdot (2x+4) - (2x+4)'(6x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3)}{(2x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(12x - 1\frac{1}{2})(2x+4) - 2(6x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3)}{(2x+4)^2} =$$

$$\frac{24x^2 - 3x + 48x - 6 - 12x^2 + 3x - 6}{(2x+4)^2} =$$

נצמצם ב-4

$$\frac{12x^2 + 48x - 12}{4x^2 + 16x + 16} = \frac{3x^2 + 12x - 3}{x^2 + 4x + 4}$$

9. $f(x) = 12x^4$

$f'(x) = 12 \cdot 4 \cdot x^3 = 48x^3$

$f'(x) = (12x^4)' = (3x^2 \cdot 4x^2)' = (3x^2)' \cdot 4x^2 + (4x^2)' \cdot 3x^2 =$

$6x \cdot 4x^2 + 8x \cdot 3x^2 = 24x^2 + 24x^2 = 48x^2$

10. $f(x) = \sqrt{x}$

$x = (\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

$x' = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x})'$

$1 = \sqrt{x}' \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x}' \cdot \sqrt{x}$

$1 = 2\sqrt{x}' \sqrt{x}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}'$

בס״ד

11. $(e^x)' = e^x$

לפי הגדרת הנגזרת:

$$(e^x)' = \lim_{\Delta\to 0} \frac{(e^{x+\Delta}) - e^x}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{e^x(e^\Delta - 1)}{\Delta} =$$

$$e^x \cdot \lim_{\Delta\to 0} \frac{e^\Delta - 1}{\Delta} = e^x \cdot 1 = e^x$$

12. $(2\sqrt{x}\, e^x)' = f(x)$

$$f'(x) = (2\sqrt{x} \cdot e^x)' = 2(\sqrt{x} \cdot e^x)' = 2 \cdot ((\sqrt{x})' \cdot e^x + (e^x)'(\sqrt{x})) =$$

$$\frac{e^x}{\sqrt{x}} + 2e^x\sqrt{x}$$

13. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

לפי הגדרה:

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\ln(x+\Delta) - \ln(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta}{x}}{\Delta} =$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{\ln(1+\frac{\Delta}{x})}{\Delta}$$

$* \log a - \log b = \log a/b$

אסור אפשר, לכן משתמשים מספק בכיוון שמאל:

$$\frac{\ln(1+\frac{\Delta}{x})}{\Delta} = \ln e^{\frac{\ln(1+\Delta/x)}{\Delta}} = \left(e^{\ln\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\Delta}\right)}\right)$$

$* \log a^b = b \cdot \log a$

$$\ln e^{\ln \sqrt[\Delta]{(1+\Delta/x)}} = \ln \sqrt[\Delta]{1+\frac{\Delta}{x}} = \ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta}}$$

לכן הגבול שווה ל-

$$\lim_{\Delta\to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta}} = \ln\left(\lim_{\Delta\to 0}\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta}}\right) =$$

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

$$\ln\left[\lim_{\Delta\to 0}\left(1+\frac{1}{x/\Delta}\right)^{\frac{x}{\Delta}\cdot\frac{1}{x}}\right] = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$e^{\ln(x)} = x$

14. $f(x) = \ln x \cdot e^x$

$f'(x) = (\ln x)' \cdot e^x + (e^x)' \cdot \ln x =$

$\frac{1}{x} \cdot e^x + e^x \ln x = e^x(\frac{1}{x} \cdot \ln x)$

* נגזרת פונקציה מורכבת (פונק' שבתוכה יש פונקציה):
עבור 2 פונקציות $f(x), g(x)$

$$[F(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

15. $f(x) = e^{x^2}$ $e^{\text{פונק'}}$ - פונק' חיצונית x^2 - פנימית

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

16. $f(x) = \ln \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{1/x} \cdot (\frac{1}{x})' = x \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{x}$ * $(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

17. $f(x) = 8^x$ מורכבת: $(x\ln x)' = \ln x$

$f'(x) = (8^x)' = (e^{\ln(8^x)})' = (e^{x\ln 8})' = e^{x\ln 8} \cdot \ln 8 = \ln 8 \cdot 8^x$

18. $f(x) = x^x$ $(\text{קבוע}^x)' = \ln \text{קבוע} \cdot \text{קבוע}^x$

$f'(x) = (x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x\ln x})' =$

$e^{x\ln x} \cdot (x\ln x)' = x^x \cdot (1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x) =$

$x^x \cdot (\ln x + 1)$

19. $\ln\sqrt{x^2+2x} = f(x)$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} \cdot (\sqrt{x^2+2x})' =$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}} \cdot (x^2+2x)' =$

$\frac{1}{2(x^2+2x)} \cdot 2x+2 = \frac{x+1}{x^2+2x}$

20. $(\sin x)' = \cos x$ ← נוסחא לחשב לפי הגדרת נגזרת

21. $(\cos x)' = -\sin x$

22. $f(x) = tg\, x$

$f'(x) = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$

$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

בס"ד

23. $f(x) = \sqrt{e^{\sin(\cos x)}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sin(\cos x)}}} \cdot \left(e^{\sin(\cos x)}\right)' =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{e^{\sin(\cos x)}}} \cdot e^{\sin(\cos x)} \cdot (\sin(\cos x))' =$$

$$\frac{\sqrt{e^{\sin(\cos x)}}}{2} \cdot \cos(\cos x) \cdot (\cos x)' =$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{e^{\sin(\cos x)}} \cdot \cos(\cos x) \cdot \sin x$$

13.1.17

מס"פ

* פונק' זוגית - כל ערך שניקח בפלוס ובמינוס, ה-y שלו יהיה זהה.

חקירת פונקציות

מנסים לקבל מושג איך הפונקציה נראית ואז לשרטט את הסקיצה שלה.

גדול ממש מ-0 · גדול שווה ל-0 · שונה מ-0

א. תחום הגדרה (מכנה, שורש, לוגריתם)

חיתוך ציר y · חיתוך ציר x

ב. חיתוך של הפונק' עם הצירים (השוואה $x=0$, $y=0$)

ג. תחומי עליה וירידה ונק' קיצון (השוואה $y'=0$)

ד. תחומי קמירות וקעירות ונק' פיתול ($\cup$ ← קמירה, $\cap$ ← קעירה, פיתול - מעבר מקמירה לקעירה ולהפך. השוואה $y''=0$)

ה. אסימפטוטות - קווים ישרים שהפונק' מתייחסת בסוג של יחס אליהם - או אנכיים או משופעים (אופק משופע: $a=\lim_{x\to\pm\infty} y/x$
אם a מס' סופי אז $b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-ax)$, אם b מס' סופי אז $y=ax+b$
אסימפטוטה אנכית - נק' אי-הגדרה.

ו. שרטוט סקיצה של הגרף.

.1 $y=x(x-9)^2$

א. תחום הגדרה: כל x. ($x\in R$)

ב. חיתוך עם צירים בנקודות (0,0) ו- (9,0)

חיתוך עם ציר ה-x:
$x(x-9)^2=0$
$x=0$ → (0,0)
$x=9$ → (9,0)

חיתוך עם ציר ה-y
$y=0(0-9)^2=0$
(0,0)

ג. תחומי עליה וירידה ונק' קיצון:

$y'=(x(x^2-18x+81))'=(x^3-18x^2+81x)'=3x^2-36x+81$
$3x^2-36x+81=0 \quad /:3$
$x^2-12x+27=0 \longrightarrow$
$x^2-9x-3x+27=0$
$x(x-9)-3(x-9)=0$
$(x-3)(x-9)=0$
$x=3$, $x=9$

	0	3	4	9	10
y'	+		−		+
y	↗	מקס'	↘	מינ'	↗

$y'(0)=81>0$ · $y'(4)<0$ · $y'(10)>0$

הצבת מס' מכל תחום ב-y' ולראות אם מתקבל מס' חיובי או שלילי.

תחום עליה: $x<3$ או $x>9$
תחום ירידה: $3<x<9$
נק' קיצון: $y(3)=54 \Leftarrow$ נק' (3,108) מקס'
$y(9)=0 \Leftarrow$ (9,0) נק' מינ'.

ד. קמירות קעירות ופיתול:

$y''=(3x^2-36x+81)'=6x-36$
$6x-36=0$
$x=6$

	0	6	7
y''	−		+
y	$\cap$		$\cup$

$y''(0)=-36<0$ · $y''(7)>0$

תחום קמירות: $x>6$
תחום קעירות: $x<6$
נק' פיתול: $y(6)=6(6-9)^2=54$ (6,54) - נק' פיתול.

המשך

ה. אסימפטוטות:

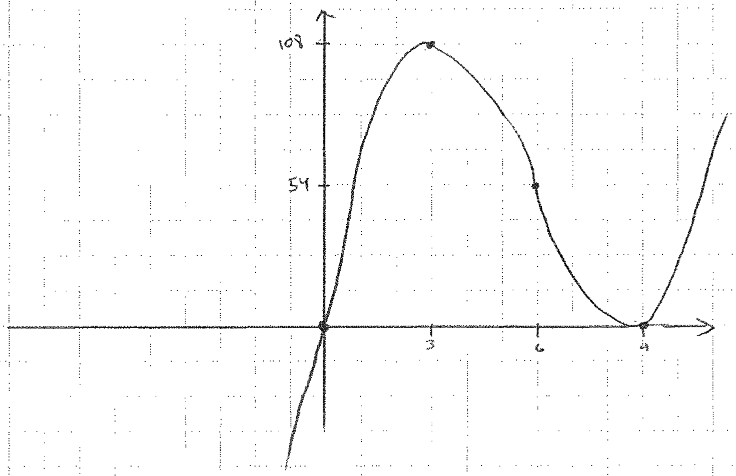
- אסימפטוטה משופעת:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}(x-9)^2}{\cancel{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}(x-9)^2=\infty$$

אין אסימפטוטה משופעת

- אסימפטוטה אנכית: אין אסימפטוטה אנכית (אין נק' אי-הגדרה, תחום ההגדרה - כל x).

ו. שרטוט סקיצה של הגרף:



ב. $y=x^2+\frac{2}{x}$

א. תחום הגדרה: $x\neq0$

ב. חיתוך עם הצירים:

חיתוך עם ציר ה-x:

$x^2+\frac{2}{x}=0$

$x^3+2=0$

$x=-\sqrt[3]{2}$

$(-\sqrt[3]{2},0)$

חיתוך עם ציר y:

$x=0$ ← לא בתחום הגדרה.

אין חיתוך עם ציר y

ג. תחומי עליה/ירידה ונק' קיצון

$y'=(x^2+\frac{2}{x})'=2x-\frac{2}{x^2}$

$2x-\frac{2}{x^2}=0$

$2x^3-2=0$

$x^3-1=0$

$x^3=1$

$x=1$

	-1	0	0.5	1	10
y'	−		−		+
y	↘		↘	מינ	↗

$y'(-1)<0$ $y'(0.5)<0$ $y'(10)>0$

תחום עליה: $x>1$

תחום ירידה: $x<0,\ 0<x<1$ ($x=0$ לא בתחום ההגדרה)

נק' קיצון: $y(1)=3 \Leftarrow (1,3)$ נק' מינימום

ד. תחומי קמירות וקעירות ונק' פיתול:

$y''=(2x-\frac{2}{x^2})'=2+\frac{4}{x^3}$

$2+\frac{4}{x^3}=0$

$\frac{4}{x^3}=-2$

$x^3=-2$

$x=-\sqrt[3]{2}$

	-2	$-\sqrt[3]{2}$	-1	0	1
y''	+		−		+
y	∪		∩		∪

$y''(-2)>0$ $y''(-1)$ $y''(1)$

תחום הקמירות: $x<-\sqrt[3]{2},\ x>0$

תחום הקעירות: $-\sqrt[3]{2}<x<0$

נק' פיתול: $y(-\sqrt[3]{2})=0 \Leftarrow (-\sqrt[3]{2},0)$

טפ"ס

ה. אסימפטוטות:

אסימפטוטה משופעת:

אין אסימפטוטה משופעת

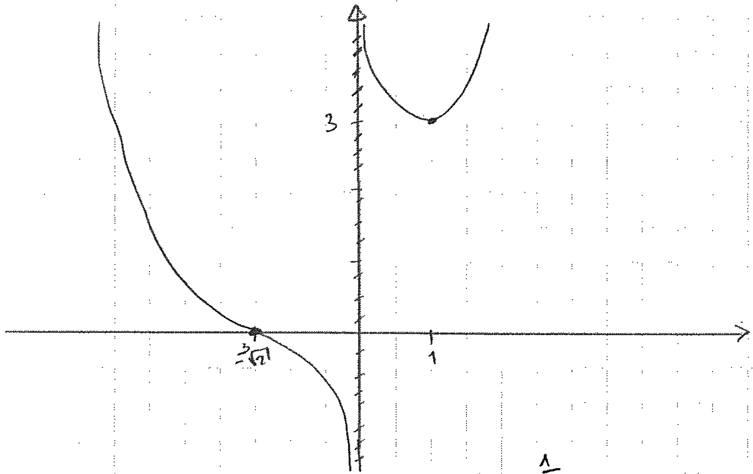
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)=\pm\infty$$

אסימפטוטה אנכית:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)&=\infty\\ \lim_{x\to0^-}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)&=-\infty\end{aligned}\right\}$$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית.

ו. שרטוט סקיצה של הגרף:



3. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$

א. תחום הגדרה: $x\neq0$

ב. חיתוך עם צירים:

חיתוך עם ציר x:

$(x+2)e^{\frac{1}{x}}=0$

$x=-2$, אין פתרון.

$(-2,0)$ חיתוך עם ציר x:

חיתוך עם ציר y:

$x=0$ לא בתחום הגדרה.

אין חיתוך עם ציר y.

ג. תחומי עליה וירידה ונק' קיצון:

$$y'=\left((x+2)e^{\frac{1}{x}}\right)'=(x+2)'\cdot e^{\frac{1}{x}}+\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'(x+2)=$$
$$e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)(x+2)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$$
$$e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=0$$
$$1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=0$$
$$x^2-x-2=0$$

$x=2$, $x=-1$

	-10	-1	-0.5	0	1	2	10
y'	$+$		$-$		$-$		$+$
y	$\nearrow$	מקס'	$\searrow$		$\searrow$	מינ'	$\nearrow$

$y'(-2)>0$ $y'(-0.5)<0$ $y'(1)<0$ $y'(10)>0$

תחומי עליה: $x<-1$, $x>2$

תחומי ירידה: $-1<x<0$, $0<x<2$

נק' קיצון:

$y(-1)=\frac{1}{e}$

מקסימום: $(-1,\frac{1}{e})$

$y(2)=4\sqrt{e}$

מינימום: $(2,4\sqrt{e})$

ד. תחומי קמירות/קעירות ונק' פיתול:

$$y''=\left(e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)\right)'=\left(\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)\right)+\left(\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)'\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)=$$
$$e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)+e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}+\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^3}\right)=$$
$$e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)$$
$$e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)=0$$
$$\left(\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)=0$$
$$5x+2=0\Rightarrow x=-\frac{2}{5}$$

	-1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	1
y''	$-$		$+$		$+$
y	$\cap$	נק' פיתול	$\cup$		$\cup$

$y''(-1)<0$ $y''(-\frac{1}{10})>0$ $y''(1)>0$

המשך

תחום עלייה: $-\frac{2}{5}<x<0$, $x>0$

תחום ירידה: $x<-\frac{2}{5}$

$$y\left(-\tfrac{2}{5}\right)= 1\tfrac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^5}}$$

נק' מקסימום $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1\frac{3}{5}}{\sqrt{e^5}}\right)$

ה. אסימפטוטות:

אסימפטוטה משופעת:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 1}+\underbrace{2\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}_{\to 0}\right)=1+0=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}(x+2)-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}_{\to 1}+\underbrace{2\cdot e^{\frac{1}{x}}}_{\to 2}\right)=1+2=3$$

אסימפטוטה משופעת:
$y=x+3$

אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}(x+2)=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}(x+2)=0$$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית מימין.

ו. סקיצה של הגרף